

TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
MATEMAATILISE STATISTIKA INSTITUUT

Helle Kilgi

Nihutatud mitmemõõtmeline asümmeetriline
Laplace'i jaotus

Magistritöö

Juhendaja: prof. Tõnu Kollo

Tartu 2007

Sisukord

Sissejuhatus	3
1 Põhimõisted ja tähistused	4
1.1 Tehted maatriksitega	4
1.2 Maatrikstuletis	7
1.3 Momendid	8
2 Laplace'i jaotus	9
2.1 Definiitsioon	9
2.2 Momendid	10
2.3 Tihedused	10
2.4 Simuleerimiseeskiri	13
3 Nihutatud Laplace'i jaotus	14
3.1 Mitmemõõtmelise asümmeetrilise Laplace'i jaotuse üldistus	14
3.2 Momendid	15
3.3 Tihedused	18
3.4 Simuleerimiseeskiri	20
4 Parameetrite hindamine	21
4.1 Momentide meetod	21
4.2 Moodide meetod	26
4.3 Hinnangute käitumine	26
Summary	37
Kirjanduse loetelu	38
Lisa: programmid	39

Sissejuhatus

Mitmemõõtmeline Laplace'i jaotus on leidnud kasutust paljudes rakendustes, näiteks finantsmatemaatikas, bioloogias ja arheoloogias (Kozubowski, Podgórski (2001), Lindsey, Lindsey (2006), Fieller jt (1992)). See on üks mudeleid mitmemõõtmeliste asümmeetriliste andmete jaoks, mis on kasutusele võetud viimase 10 aasta jooksul. Laplace'i jaotusel on palju häid omadusi: tema karakteristiklik funktsioon on lihtsal kujul ning vaatamata rasketele sabadele eksisteerivad jaotusel momendid, mis on lihtsasti avaldatavad jaotuse parameetrite kaudu.

Reaalsete andmete kirjeldamine Laplace'i jaotusega on aga raskendatud. Jaotus on määratud kahe mitmemõõtmelise parameetriga: üks kirjeldab hajuvust, teine samaaegselt jaotuse paiknemist ning kuju. Kui asukoht on fikseeritud, on sellega suuresti määratud ka jaotuse kuju. Käesolevas töös üldistatakse Laplace'i jaotust täiendava parameetri lisamisega, mis võimaldab muuta jaotuse paiknemist ja kuju üksteisest sõltumatult. Teisalt muutub keerukamaks parameetrite hindamise ülesanne.

Esimeses osas tutvustatakse töös kasutatavaid tähistusi, mõisteid ning maatriksalgebrat.

Teine peatükk annab lühiülevaate mitmemõõtmelisest Laplace'i jaotusest.

Kolmandas peatükis tuuakse sisse nihutatud Laplace'i jaotus, tuletatakse selle karakteristiklik funktsioon, momendid, tihedus- ja jaotusfunktsioon, marginaaljaotused ning simuleerimiseeskiri.

Neljas osa on pühendatud jaotuse parameetrite hindamise problemaatikale. Tuletatakse momentide meetodi hinnang ning kirjeldatakse hindamismeetodit, mis kasutab ära jaotuse parameetrite seotust marginaaljaotuste moodidega. Hinnangute käitumist vaadeldakse simulatsiooniekspereimentidega.

Esimesed kaks peatükki on referatiivsed, kolmanda ja neljanda osa tulemused on uued. Idee üldistada Laplace'i jaotust töös esitatud kujul on pärit professor Tõnu Kollolt.

1 Põhimõisted ja tähistused

Töös on kasutatud maatriksite, vektorite ja juhuslike suuruste jaoks järgmisi põhitähistusi:

\mathbf{I}_p	p -järku ühikmaatriks;
$\mathbf{1}_p$	p -vektor, mille kõik elemendid on ühed;
$\mathbf{1}_{p \times q}$	$p \times q$ -maatriks, mille kõik elemendid on ühed;
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$	vektorid;
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$	maatriksid;
X, Y, Z, \dots	juhuslikud suurused;
$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \dots$	juhuslikud vektorid;
$\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \dots$	juhuslikud maatriksid;
\mathbf{A}^T	transponeeritud maatriks \mathbf{A} ;
$\text{tr } \mathbf{A}$	maatriksi \mathbf{A} jälg;
$\text{vec } \mathbf{A}$	vektor maatriksi \mathbf{A} veergudest;
$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$	maatriksite \mathbf{A} ja \mathbf{B} otsekorrutis;
$\mathbf{A} \star \mathbf{B}$	maatriksite \mathbf{A} ja \mathbf{B} tähtkorrutis.

1.1 Tehted maatriksitega

Järgnevas on antud ülevaade töös kasutatud maatriksalgebrast. Tuginetud on raamatutele Schott (1997) ja Kollo, von Rosen (2005).

Plokkmaatriksid

Definitsioon 1.1 *Öeldakse, et $p \times q$ -maatriks \mathbf{A} on plokkmaatriks, kui ta koosneb $p_i \times q_i$ -alammaatriksitest \mathbf{A}_{ij} , $i = 1, \dots, u$; $j = 1, \dots, v$ nii, et*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \dots & \mathbf{A}_{1v} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \dots & \mathbf{A}_{2v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{u1} & \mathbf{A}_{u2} & \dots & \mathbf{A}_{uv} \end{pmatrix}, \quad \sum_{i=1}^u p_i = p; \quad \sum_{i=1}^v q_i = q.$$

Lühidalt tähistatakse sellist maatriksit

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ij}], \quad i = 1, \dots, u; \quad j = 1, \dots, v.$$

Plokkmaatriksi \mathbf{A} elementidele viitamisel määratakse plokk, kus element asub ning elemendi asukoht selles ploki. Rea (k, l) all mõeldakse k . plokirea $(\mathbf{A}_{k1}, \mathbf{A}_{k2}, \dots, \mathbf{A}_{kv})$ l . rida ehk maatriksi $(\sum_{i=1}^{k-1} p_i + l)$ -ndat rida. Veeru (g, h) all mõeldakse g . plokiveeru

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1g} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{ug} \end{pmatrix}$$

h . veergu ehk maatriksi $(\sum_{i=1}^{g-1} q_i + h)$ -ndat veergu. Plokkmaatriksi \mathbf{A} elementi $(k - l)$ -ndas reas ja (g, h) -ndas veerus tähistatakse $a_{(k,l)(g,h)}$ või $(\mathbf{A})_{(k,l)(g,h)}$.

Kehtivad järgmised omadused.

- Olgu \mathbf{A} plokkmaatriks. Siis

$$c\mathbf{A} = [c\mathbf{A}_{ij}], \quad i = 1, \dots, u; \quad j = 1, \dots, v,$$

kus $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ij}]$ ning c konstant.

- Olgu $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ij}]$ ja $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_{ij}]$ plokkmaatriksid sama järku plokkidega. Siis

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [\mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij}], \quad i = 1, \dots, u; \quad j = 1, \dots, v,$$

Otsekorrutis

Definitsioon 1.2 Olgu $\mathbf{A} = (a_{ij})$ $p \times q$ -maatriks ja \mathbf{B} $r \times s$ -maatriks. Maatriksite \mathbf{A} ja \mathbf{B} otsekorrutiseks nimetatakse $pr \times qs$ -plokkmaatriksit $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$, mis on defineeritud võrdusega

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = [a_{ij}\mathbf{B}], \quad i = 1, \dots, p; \quad j = 1, \dots, q.$$

Otsekorrutist tuntakse ka Kroneckeri korrutise nime all. Erinevalt tavalisest maatriksite korrutamistest on otsekorrutis defineeritud mistahes kahe maatriksi korral. Üldjuhul pole maatriksite otsekorrutamine kommutatiivne. Kehtivad järgmised omadused.

- Olgu a skalaar ning \mathbf{A} maatriks, siis

$$a \otimes \mathbf{A} = \mathbf{A} \otimes a = a\mathbf{A}. \quad (1)$$

- Kui \mathbf{a} ja \mathbf{b} on vektorid, siis

$$\mathbf{a}\mathbf{b}^T = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}^T = \mathbf{b}^T \otimes \mathbf{a}. \quad (2)$$

- Olgu \mathbf{A} ja \mathbf{B} $p \times q$ -maatriksid ning \mathbf{C} ja \mathbf{D} $r \times s$ -maatriksid. Siis

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes (\mathbf{C} + \mathbf{D}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{D} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{D}. \quad (3)$$

- Olgu maatriksid $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ sellised, et korrutised \mathbf{AB} ja \mathbf{CD} oleksid defineeritud. Siis

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{AB}) \otimes (\mathbf{CD}). \quad (4)$$

- Mistahes maatriksite \mathbf{A}, \mathbf{B} ja \mathbf{C} korral

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T, \quad (5)$$

$$\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C}. \quad (6)$$

vec-operaator

Definitsioon 1.3 Olgu \mathbf{A} $p \times q$ -maatriks ning \mathbf{a}_i maatriksi \mathbf{A} i . veerg. Siis

$$\text{vec}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_q \end{bmatrix}.$$

Tulemuseks on pq -vektor.

Töös kasutatakse operaatori vec järgmisi omadusi. Olgu \mathbf{a} ja \mathbf{b} vektorid. Siis

$$\text{vec}\mathbf{a} = \text{vec}\mathbf{a}^T = \mathbf{a}, \quad (7)$$

$$\text{vec}(\mathbf{a}\mathbf{b}^T) = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}. \quad (8)$$

Tähtkorrutis

Maatriksite tähtkorrutis on sisse toodud artiklis MacRae (1974). Järgnev esitus järgib valdavalt tema artiklit.

Definitsioon 1.4 Olgu $\mathbf{A} = (a_{ij})$ $p \times q$ -maatriks ning \mathbf{B} $pr \times qs$ -maatriks, mis koosneb $r \times s$ -plokkidest \mathbf{B}_{ij} , $i = 1, \dots, p$; $j = 1, \dots, q$. Maatriksite \mathbf{A} ja \mathbf{B} tähtkorrutis on $r \times s$ -maatriks

$$\mathbf{A} \star \mathbf{B} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q a_{ij} \mathbf{B}_{ij}.$$

Tähtkorrutis on maatriksi jälje üldistus. Kui maatriksid \mathbf{A} ja \mathbf{B} on sama järku, siis

$$\mathbf{A} \star \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B}). \quad (9)$$

Kehtivad järgmised omadused.

- Olgu \mathbf{A} $p \times q$ -maatriks, \mathbf{B} $pr \times qs$ -maatriks ning c ja d skalaarid. Siis

$$c\mathbf{A} \star d\mathbf{B} = cd(\mathbf{A} \star \mathbf{B}). \quad (10)$$

- Olgu \mathbf{A} ja \mathbf{B} $p \times q$ -maatriksid ning \mathbf{C} ja \mathbf{D} $pr \times qs$ -maatriksid. Siis

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \star (\mathbf{C} + \mathbf{D}) = \mathbf{A} \star \mathbf{C} + \mathbf{B} \star \mathbf{C} + \mathbf{B} \star \mathbf{D} + \mathbf{A} \star \mathbf{D}. \quad (11)$$

- Olgu \mathbf{A} $p \times q$ -maatriks, \mathbf{B} $pr \times qs$ -maatriks ning \mathbf{C} mistahes maatriks. Siis

$$(\mathbf{A} \star \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \star (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}). \quad (12)$$

- Olgu \mathbf{A} $m \times p$ -maatriks, \mathbf{B} $p \times q$ -maatriks ja \mathbf{C} $q \times n$ -maatriks. Siis

$$\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C} = \mathbf{B} \star (\text{vec}\mathbf{A}\text{vec}^T\mathbf{C}^T). \quad (13)$$

- Olgu \mathbf{a}, \mathbf{b} p -vektorid ning \mathbf{C} $q \times p$ -maatriks. Siis kehtib

$$(\mathbf{a}\mathbf{a}^T) \star (\mathbf{b} \otimes \mathbf{C}) = (\mathbf{a}^T \mathbf{b}) \mathbf{C} \mathbf{a}. \quad (14)$$

Omadus järeldub vahetult tavalise korrutise ja tähtkorrutise definitsioonidest. Tähistagu \mathbf{C}_j maatriksi \mathbf{C} j . veergu ning olgu $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)^T$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_p)^T$. Siis

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}\mathbf{a}^T) \star (\mathbf{b} \otimes \mathbf{C}) &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (\mathbf{a}\mathbf{a}^T)_{ij} [\mathbf{b} \otimes \mathbf{C}]_{ij} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_i a_j b_i \mathbf{C}_j = \sum_{i=1}^p a_i b_i \cdot \sum_{j=1}^p a_j \mathbf{C}_j = \\ &= (\mathbf{a}^T \mathbf{b}) \mathbf{C} \mathbf{a}. \end{aligned}$$

1.2 Maatrikstuletis

Käesolevas töös kasutame Neudeckeri (1969) maatrikstuletise definitsiooni. Olgu $\mathbf{Y} : r \times s$ ja $\mathbf{X} : p \times q$. Maatrikstuletis $\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{X}} : rs \times pq$ on defineeritud kui

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial \text{vec}^T \mathbf{X}} \otimes \text{vec} \mathbf{Y},$$

kus

$$\frac{\partial}{\partial \text{vec}^T \mathbf{X}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_{11}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{p1}}, \frac{\partial}{\partial x_{12}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{p2}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{1q}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{pq}} \right).$$

Kõrgemat järku maatrikstuletised leitakse madalamate kaudu:

$$\frac{\partial^k \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{X}^k} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left(\frac{\partial^{k-1} \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{X}^{k-1}} \right).$$

Sellisel defineeritud maatrikstuletisel on järgnevad omadused.

$$\frac{\partial c \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} = c \mathbf{I}_{pq}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial (\mathbf{U} + \mathbf{V})}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{X}}. \quad (16)$$

Olgu \mathbf{A} ja \mathbf{B} sobivate mõõtmetega konstantsed maatriksid, siis

$$\frac{\partial \mathbf{A} \mathbf{Y} \mathbf{B}}{\partial \mathbf{X}} = (\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{A}) \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{X}}. \quad (17)$$

Olgu $\mathbf{Y} : r \times s$ ja $\mathbf{Z} : s \times n$ maatriksi \mathbf{X} funktsioonid. Siis

$$\frac{\partial (\mathbf{Y} \mathbf{Z})}{\partial \mathbf{X}} = (\mathbf{Z}^T \otimes \mathbf{I}_r) \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{X}} + (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{Y}) \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{X}}. \quad (18)$$

Suvaliste \mathbf{X} , \mathbf{Y} ja \mathbf{Z} jaoks kehtib

$$\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{Y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{X}}. \quad (19)$$

Olgu $\mathbf{x} : p \times 1$, $y : 1 \times 1$ ja $\mathbf{Z} : p \times p$ -maatriksid. Siis

$$\frac{\partial(y \otimes \mathbf{Z})}{\partial \mathbf{x}} = \text{vec} \mathbf{Z} \frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}} + y \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{x}}. \quad (20)$$

1.3 Momendid

Olgu \mathbf{x} juhuslik p -vektor keskväärtusega $\boldsymbol{\mu}$. Eeldame, et vajalikud keskväärtused eksisteerivad.

Definitsioon 1.5 *Juhusliku vektori \mathbf{x} k -järku moment on kujul*

$$m_k(\mathbf{x}) = E(\underbrace{\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \dots \otimes \mathbf{x}}_{k-1} \cdot \mathbf{x}^T).$$

Definitsioon 1.6 *Juhusliku vektori \mathbf{x} k -järku tsentraalne moment on kujul*

$$\bar{m}_k(\mathbf{x}) = m_k(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = E(\underbrace{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \otimes (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \dots \otimes (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}_{k-1} \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T).$$

Definitsioonidest jäeldub, et p -vektori k -järku moment ja tsentraalne moment on $p^{k-1} \times p$ -maatriksid.

Juhusliku vektori \mathbf{x} momendid avalduvad karakteristliku funktsiooni $\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})$ tuletiste kaudu:

$$m_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{i^k} \left. \frac{\partial^k \varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}^k} \right|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}}. \quad (21)$$

2 Laplace'i jaotus

Käesoleva peatüki tulemused on valdavas enamuses pärit S. Kotzi, T. J. Kozubowski ja K. Podgórski 2001. aastal ilmunud Laplace'i jaotuse monograafiast.

2.1 Definiitsioon

Laplace'i jaotuse parameetrite kirjeldamiseks vajame positiivse määratuse mõistet.

Definiitsioon 2.1 *Sümmeetriline ruutmaatriks \mathbf{A} on positiivselt määratud, kui $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ iga vektori $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ korral.*

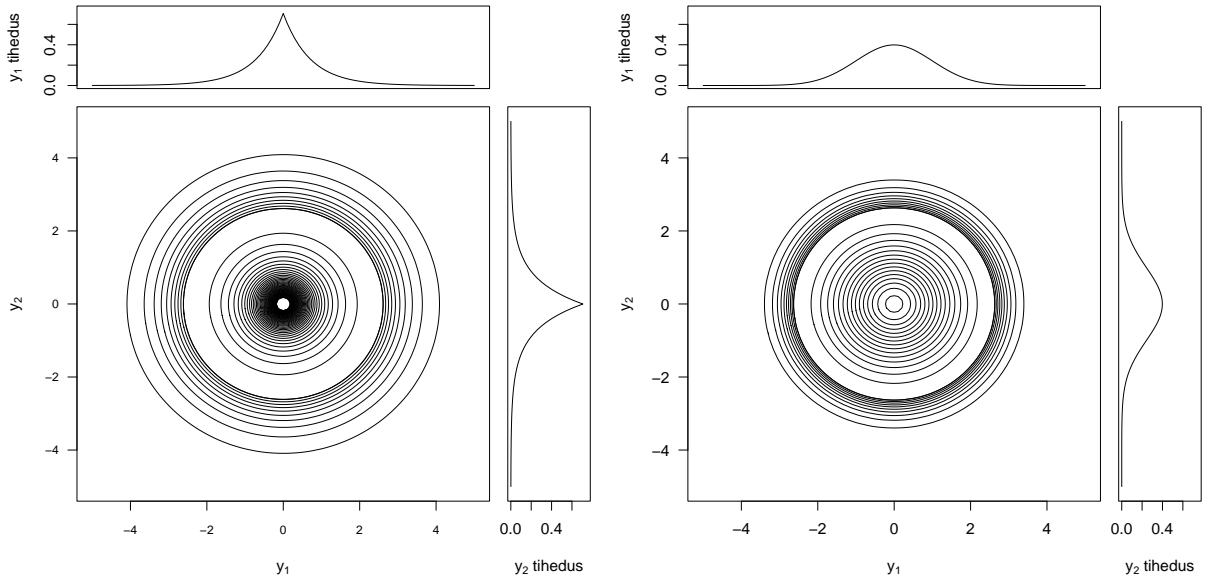
Definiitsioon 2.2 *Olgu $\boldsymbol{\mu}$ p -vektor ja $\boldsymbol{\Sigma}$ positiivselt määratud $p \times p$ -maatriks. Öeldakse, et juhuslik vektor \mathbf{x} on p -mõõtmelise asümmeetrilise Laplace'i jaotusega, kui \mathbf{x} karakteristlik funktsioon on*

$$\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \left[1 - i \mathbf{t}^T \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2} \mathbf{t}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t} \right]^{-1},$$

lühidalt $\mathbf{x} \sim L_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Töös kasutame mitmemõõtmelise asümmeetrilise Laplace'i jaotuse tähenduses ka lühemat sõnastust *Laplace'i jaotus*.

Joonis 1 illustreerib kahemõõtmelise Laplace'i jaotuse ning tema marginaaljaotuste kuju sümmeetrilisel erijuhul, võrdluseks on toodud normaaljaotus. Välja on toodud sabade ja tipu käitumine: Laplace'i jaotuse sabad on rasked ning tipp terav. Joonisel 2 on toodud valik erinevaid Laplace'i jaotuse kujusid. Läbilõiked kontuurgraafikutel on tehtud kümnes võrdsete vahedega punktis vahemikus (0, 0.005) ning viiekümnes võrdsete vahedega punktis vahemikus (0.005, 0.5).



Joonis 1: Kahemõõtmeline sümmeetriline Laplace'i jaotus (vasakul) ja normaaljaotus (paremal). Mõlemad jaotused on keskväärtusega $\mathbf{0}$ ja dispersiooniga \mathbf{I}_2 .

2.2 Momendid

Olgu $\mathbf{x} \sim L_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Siis on \mathbf{x} esimesed momendid (Kollo, Srivastava (2004)):

$$E\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu}, \quad (22)$$

$$D\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T + \boldsymbol{\Sigma}, \quad (23)$$

$$m_3(\mathbf{x}) = 6\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T + 2\text{vec}\boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\mu}^T + 2\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\Sigma} + 2\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\mu}. \quad (24)$$

Kolmas moment iseloomustab jaotuse asümmeetriat (vt mitmemõõtmeliste asümmeetriakordajate ülevaade Kollo (2007) või Kilgi (2005)). Kui $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, siis ka $m_3(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, seega on siis jaotus sümmeetriline.

2.3 Tihedused

Teoreem 2.1 annab Laplace'i jaotuse jaotus- ja tihedusfunktsiooni (Kotz jt (2001), lk 249-250).

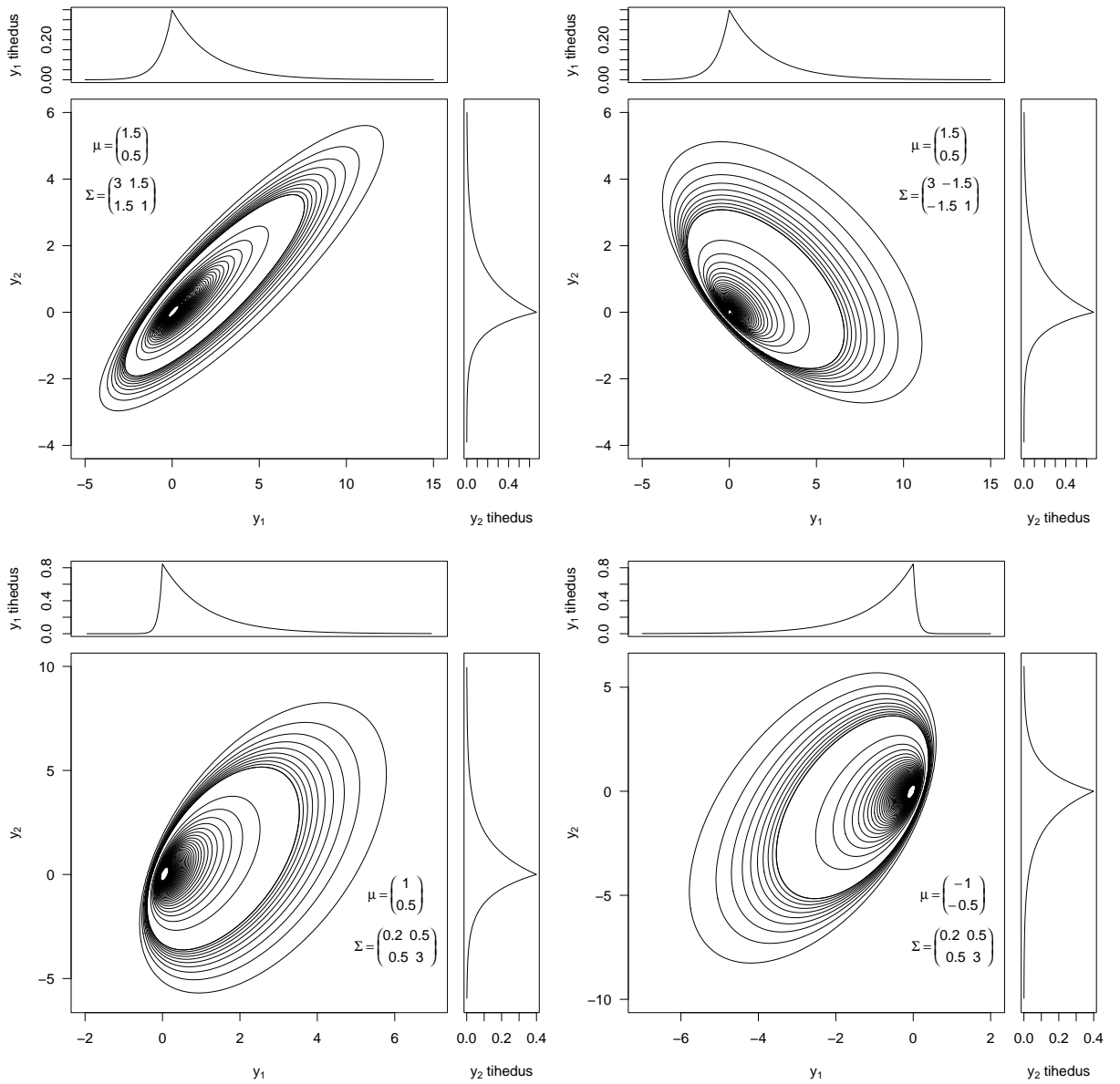
Teoreem 2.1 Olgu $\mathbf{x} \sim L_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Tähistagu F ja f vastavalt normaaljaotuse $N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ jaotus- ja tihedusfunktsiooni. Siis avaldub \mathbf{x} jaotusfunktsioon

$$G(\mathbf{t}) = \int_0^\infty F(z^{-1/2}\mathbf{t} - z^{1/2}\boldsymbol{\mu})e^{-z}dz$$

ning tihedusfunktsioon (juhul, kui eksisteerib)

$$\begin{aligned} g(\mathbf{t}) &= \int_0^\infty f(z^{-1/2}\mathbf{t} - z^{1/2}\boldsymbol{\mu})z^{-p/2}e^{-z}dz \\ &= \frac{2e^{\mathbf{t}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}}{(2\pi)^{p/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \left(\frac{\mathbf{t}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{t}}{2 + \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}} \right)^{\nu/2} K_\nu \left(\sqrt{(2 + \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})(\mathbf{t}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{t})} \right), \end{aligned}$$

kus $\nu = (2 - p)/2$ ja K_ν on kolmandat liiki modifitseeritud Besseli funktsioon.



Joonis 2: Valik Laplace'i jaotuse kujusid.

Kolmandat liiki modifitseeritud Besseli funktsiooni esitus Watsoni (1962) järgi on järgmine:

$$K_\lambda(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{u}{2}\right)^\lambda \int_0^\infty t^{-\lambda-1} \exp\left(-t - \frac{u^2}{4t}\right) dt, \quad u > 0.$$

Ühemõõtmelisel juhul $\boldsymbol{\mu} = \mu$, $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2$ on tihedusfunktsiooni kuju

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2}} e^{-\frac{|t|}{\sigma^2} (\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2} - \mu \cdot \text{sign}(t))}. \quad (25)$$

Vahetult karakteristikliku funktsiooni kujust järeldub, et Laplace'i jaotusega juhusliku vektori lineaarsed teisendused kuuluvad samasse jaotusklassi.

Lause 2.1 Olgu $\mathbf{x} \sim L_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ning olgu \mathbf{A} täisastakuga reaalarvuline $q \times p$ -maatriks, $q < p$. Siis on \mathbf{x} lineaarne teisendus \mathbf{Ax} q -mõõtmelise Laplace'i jaotusega, $\mathbf{Ax} \sim L_q(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^T)$.

TÕESTUS. Lineaarse teisenduse karakteristliku funktsiooni jaoks kehtib üldine seos

$$\varphi_{\mathbf{Ax}}(\mathbf{t}) = Ee^{it^T \mathbf{Ax}} = Ee^{i(\mathbf{A}^T \mathbf{t})^T \mathbf{x}} = \varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{A}^T \mathbf{t}).$$

Laplace'i jaotusega juhusliku vektori \mathbf{x} lineaarse teisenduse karakteristlik funktsioon on seega

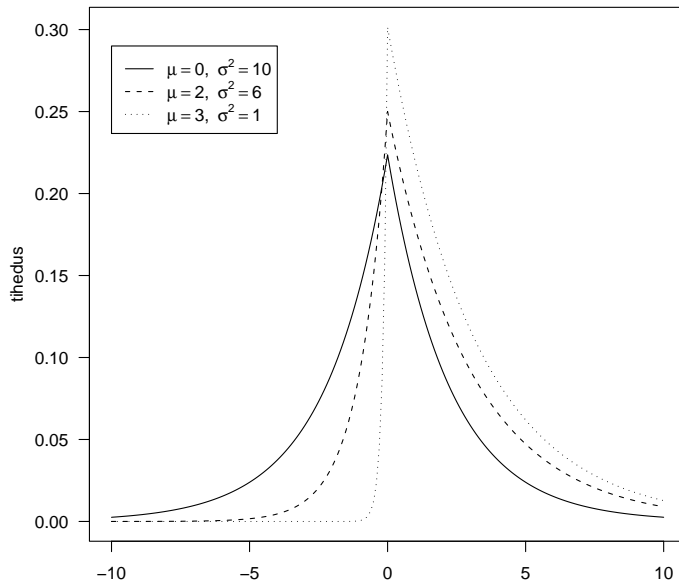
$$\varphi_{\mathbf{Ax}}(\mathbf{t}) = \varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{A}^T \mathbf{t}) = \left[1 - i(\mathbf{A}^T \mathbf{t})^T \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}(\mathbf{A}^T \mathbf{t})^T \boldsymbol{\Sigma} (\mathbf{A}^T \mathbf{t}) \right]^{-1} = \left[1 - i\mathbf{t}^T \cdot \mathbf{A} \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2} \mathbf{t}^T \cdot \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{t} \right]^{-1},$$

milles tunneme ära parameetritega $\mathbf{A} \boldsymbol{\mu}$ ja $\mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A}^T$ Laplace'i jaotuse karakteristliku funktsiooni. \square

Lausest 2.1 järeldub, et kõik marginaaljaotused (nii ühe- kui mitmemõõtmelised) on samuti Laplace'i jaotusega. Vektori $\mathbf{x} = (X_1, \dots, X_n)^T$ i . komponendi jaotuse saame, kasutades lineaarset teisendust

$$\mathbf{A} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, 0, \dots, 0).$$

Kui \mathbf{x} on Laplace'i jaotusega parameetritega $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_p)^T$ ja $\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^p$, siis $X_i \sim L(\mu_i, \sigma_{ii})$. (Analoogselt normaaljaotusega ei märgi me jaotuse tähises ühemõõtmelisel puhul dimensionsiooni, so L_1 asemel kirjutame L .) Joonisel 2 on näide erinevatest ühisjaotustest, mille korral marginaaljaotused on samad. Kahe ülemise jaotuse parameetrid valitud selliselt, et jaotused erinevad ainult komponentidevahelise kovariatsiooni poolest, mis ei mõjuta marginaaljaotuste parameetreid.



Joonis 3: Ühemõõtmelise Laplace'i jaotuse tihedusfunktsiooni kuju kolme erineva μ väärtuse korral, kõigi kolme jaotuse dispersioon on $\mu^2 + \sigma^2 = 10$. Jaotuse terav tipp on alati punktis 0.

Märgime, et ühemõõtmelise jaotuse korral on jaotuse mood alati punktis 0 (joonis 3). Funktsiooni lokaalne ekstreemum peab paiknema alati kriitilises punktis, st punktis, kus tuletis on võrdne nulliga, on lõpmatu või ei eksisteeri. Laplace'i jaotuse tihedusfunktsiooni ainus kriitiline punkt on 0, kus kahepoolset tuletist ei leidu.

2.4 Simuleerimiseeskiri

Juhuslike suuruste genereerimine Laplace'i jaotusest on küllalt lihtne, vaja on osata simuleerida väärtusi eksponentjaotusest ja mitmemõõtmelisest normaaljaotusest. Järgnev algoritm genereerib väärtusi jaotusest $L_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ (Kotz jt (2001), lk 248-249).

- Genereerida standardse eksponentjaotusega juhuslik suurus W .
- Genereerida juhuslik vektor \mathbf{z} p -mõõtmelisest normaaljaotusest $N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$.
- Olgu $\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu} \cdot W + \sqrt{W} \cdot \mathbf{z}$. Nii defineeritud \mathbf{x} on realisatsioon jaotusest $L_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

3 Nihutatud Laplace'i jaotus

3.1 Mitmemõõtmelise asümmeetrilise Laplace'i jaotuse üldistus

Vaatleme mitmemõõtmelise asümmeetrilise Laplace'i jaotusega juhuslikku vektorit $\mathbf{x} \sim L_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Parameeter $\boldsymbol{\mu}$ määrab jaotuse asukoha, kuid mõjutab tugevalt ka jaotuse kuju, näiteks $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ korral on jaotus sümmeetriline. Üldisemalt: Laplace'i jaotuse erinevadujud pole igas kohas võimalikud. See omadus on puuduseks Laplace'i jaotuse kasutamisel andmemudelina.

Kui nihutada Laplace'i jaotusega juhuslikku vektorit konstandi \mathbf{a} võrra, ei ole tulemus enam samast jaotusklassist:

$$\varphi_{\mathbf{x}+\mathbf{a}}(\mathbf{t}) = e^{i\mathbf{t}^T \mathbf{a}} \cdot \varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \frac{e^{i\mathbf{t}^T \mathbf{a}}}{1 - i\mathbf{t}^T \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}\mathbf{t}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t}}. \quad (26)$$

Näiteks pole tsentreeritud juhuslik vektor $\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}$ enam Laplace'i jaotusega.

See annab idee üldisema, nihete suhtes suletud jaotusklassi konstrueerimiseks.

Definitsioon 3.1 Olgu $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{a}$, kus $\mathbf{x} \sim L_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ning \mathbf{a} on suvaline p -vektor. Siis on \mathbf{y} nihutatud mitmemõõtmelise asümmeetrilise Laplace'i jaotusega,

$$\mathbf{y} \sim L_p(\mathbf{a}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}).$$

Parameeter \mathbf{a} võimaldab kasutada kõiki Laplace'i jaotuse võimalikke kujusid mistahes ruumipunktis. Uus jaotusklass on kinnine konstantsete nihete suhtes: nihutatud Laplace'i jaotusega vektori \mathbf{y} ja konstantse p -vektori \mathbf{b} summa karakteristik funktsioon on

$$\varphi_{\mathbf{y}+\mathbf{b}}(\mathbf{t}) = e^{i\mathbf{t}^T \mathbf{b}} \varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{t}) = \frac{e^{i\mathbf{t}^T (\mathbf{a}+\mathbf{b})}}{1 - i\mathbf{t}^T \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}\mathbf{t}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t}},$$

seega $\mathbf{y} + \mathbf{b} \sim L_p(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Uus jaotus on Laplace'i jaotuse üldistus: võttes $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, saame tavalise Laplace'i jaotuse. Kui võtta $\mathbf{a} = -\boldsymbol{\mu}$, saame tsentreeritud Laplace'i juhusliku vektori.

Uue jaotusklassi nimi on teadlikult valitud ebastandardne. Loomulik oleks nimetada uut jaotust samuti mitmemõõtmeliseks asümmeetriliseks Laplace'i jaotuseks. Nimelt kutsutakse ühemõõtmelisel juhul nii kahe kui kolme parameetriga jaotust asümmeetriliseks Laplace'i jaotuseks (Kotz jt (2001)). Vältimaks segadust vana ja kitsama ning uue ja laiema jaotusklassi vahel antud töö käigus, on uus jaotus saanud liignime „nihutatud“. Samas sobitub tähistus $L_p(\mathbf{a}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ olemasolevasse süsteemi, ka ühemõõtmelisel puhul on jaotuse lühend üldisemal ja kitsamal juhul sama ning kolme parameetriga juhul pannakse need kirja järjekorras (*asukohaparameter; kujuparameter; skaalaparameter*).

Selles töös nimetame nihutatud mitmemõõtmelist asümmeetrilist Laplace'i jaotust lühidalt *nihutatud Laplace'i jaotuseks*.

3.2 Momendid

Lause 3.1 Olgu juhuslik vektor \mathbf{y} nihutatud Laplace'i jaotusega, $\mathbf{y} \sim L_p(\mathbf{a}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Juhusliku vektori \mathbf{y} keskväärtus, dispersioon ja kolmas moment avalduvad järgmiselt:

$$E\mathbf{y} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{a}, \quad (27)$$

$$D\mathbf{y} = \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T + \boldsymbol{\Sigma}, \quad (28)$$

$$m_3(\mathbf{y}) = (\boldsymbol{\mu} + \mathbf{a}) \otimes \mathbf{a}\mathbf{a}^T + (2\boldsymbol{\mu} + \mathbf{a}) \otimes \boldsymbol{\mu}\mathbf{a}^T + (2\boldsymbol{\mu} + \mathbf{a}) \otimes \mathbf{a}\boldsymbol{\mu}^T + (6\boldsymbol{\mu} + 2\mathbf{a}) \otimes \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T \\ + \text{vec}\boldsymbol{\Sigma} \cdot (2\boldsymbol{\mu} + \mathbf{a})^T + (2\boldsymbol{\mu} + \mathbf{a}) \otimes \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\Sigma} \otimes (2\boldsymbol{\mu} + \mathbf{a}). \quad (29)$$

Keskväärtuse ja dispersioonimaatriksi avaldised on kooskõlas intuitsiooniga. Kui nihutame juhuslikku vektori konstandi võrra, liigub sama konstandi võrra ka selle keskväärtus. Samuti on loomulik, et konstandi võrra nihutamine ei muuda dispersiooni.

Võttes $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, saame tavalise Laplace'i jaotusega juhusliku vektori kolmanda momendi (vt (24)).

Paneme tähele, et Laplace'i jaotusega juhusliku vektori \mathbf{x} ja temast nihke \mathbf{a} abil saadud juhusliku vektori \mathbf{y} tsentraalsed momendid on võrdsed:

$$\bar{m}_k(\mathbf{y}) = m_k(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu} - \mathbf{a}) = m_k(\mathbf{x} + \mathbf{a} - \boldsymbol{\mu} - \mathbf{a}) = m_k(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = \bar{m}_k(\mathbf{x}).$$

Juhusliku vektori \mathbf{x} kolmanda tsentraalse momendi saame, võttes $\mathbf{a} = -\boldsymbol{\mu}$,

$$\bar{m}_3(\mathbf{x}) = \bar{m}_3(\mathbf{y}) = 2\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T + \text{vec}\boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\mu}^T + \boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\mu}. \quad (30)$$

Tõestame Lause 3.1.

TÕESTUS. Kasutame momentide esitust karakteristliku funktsiooni tuletiste kaudu (valem (21)). Olgu $\mathbf{x} \sim L_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ja $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{a}$, siis $\mathbf{y} \sim L_p(\mathbf{a}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Juhusliku vektori \mathbf{y} karakteristlik funktsioon on antud valemiga (26).

Esimene moment. Leiame $\varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{t})$ tuletise $\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})$ kaudu:

$$\frac{\partial \varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} \left[e^{i\mathbf{t}^T \mathbf{a}} \varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) \right] = \frac{\partial e^{i\mathbf{t}^T \mathbf{a}}}{\partial \mathbf{t}} \cdot \varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) + \frac{\partial \varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} \cdot e^{i\mathbf{t}^T \mathbf{a}},$$

kus vajalikud tuletised on

$$\begin{aligned} \frac{\partial e^{i\mathbf{t}^T \mathbf{a}}}{\partial \mathbf{t}} &= i\mathbf{a}^T e^{i\mathbf{t}^T \mathbf{a}}, \\ \frac{\partial \varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} \left[\left(1 - i\mathbf{t}^T \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2} \mathbf{t}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t} \right)^{-1} \right] = -[\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})]^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} \left(1 - i\mathbf{t}^T \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2} \mathbf{t}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t} \right) \\ &= -[\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})]^2 \cdot \left[i \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} (-\mathbf{t}^T \boldsymbol{\mu}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} (\mathbf{t}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t}) \right] = [\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})]^2 (i\boldsymbol{\mu}^T - \mathbf{t}^T \boldsymbol{\Sigma}), \end{aligned}$$

seega

$$\frac{\partial \varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} = e^{i\mathbf{t}^T \mathbf{a}} \left[i\mathbf{a}^T \varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) + [\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})]^2 (i\boldsymbol{\mu}^T - \mathbf{t}^T \boldsymbol{\Sigma}) \right].$$

Vektori \mathbf{y} keskväärtuseks saame

$$E\mathbf{y} = [m_1(\mathbf{y})]^T = \left[\frac{1}{i} \frac{\partial \varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} \Big|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}} \right]^T = \frac{1}{i} (i\mathbf{a}^T + i\boldsymbol{\mu}^T)^T = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{a}.$$

Teine moment ja dispersioonimaatriks. Eelnevaga sarnast kaheastmelist skeemi kasutame ka kõrgemat järku tuletiste leidmiseks: avaldame φ_y tuletised φ_x tuletiste kaudu, sest viimaseid on lihtsam leida. Ülevaatlukustamiseks kasutame edasises tõestuses karakteristliku funktsiooni tuletiste jaoks lühitähistusi:

$$\varphi'(\mathbf{t}) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}}, \varphi''(\mathbf{t}) = \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}^2}, \varphi'''(\mathbf{t}) = \frac{\partial^3 \varphi(\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}^3}.$$

Laplace'i jaotuse karakteristliku funktsiooni teine tuletis on

$$\begin{aligned} \varphi_x''(\mathbf{t}) = \frac{\partial \varphi_x'(\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} \left[[\varphi_x(\mathbf{t})]^2 (i\boldsymbol{\mu}^T - \mathbf{t}^T \boldsymbol{\Sigma}) \right] \\ &\stackrel{(18)}{=} (i\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t}) \frac{\partial [\varphi_x(\mathbf{t})]^2}{\partial \mathbf{t}} + (\mathbf{I}_p \otimes [\varphi_x(\mathbf{t})]^2) \frac{\partial (i\boldsymbol{\mu}^T - \mathbf{t}^T \boldsymbol{\Sigma})}{\partial \mathbf{t}} \\ &= (i\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t}) \cdot 2\varphi_x(\mathbf{t}) \cdot \varphi_x'(\mathbf{t}) + [\varphi_x(\mathbf{t})]^2 \cdot (-\boldsymbol{\Sigma}) \\ &= 2[\varphi_x(\mathbf{t})]^3 (i\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t}) (i\boldsymbol{\mu}^T - \mathbf{t}^T \boldsymbol{\Sigma}) - [\varphi_x(\mathbf{t})]^2 \boldsymbol{\Sigma}. \end{aligned}$$

Meid huvitab tuletise väärtus punktis $\mathbf{t} = \mathbf{0}$:

$$\varphi_x''(\mathbf{0}) = 2i\boldsymbol{\mu} \cdot i\boldsymbol{\mu}^T - \boldsymbol{\Sigma} = -2\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T - \boldsymbol{\Sigma}.$$

Nüüd saame leida φ_y teise tuletise:

$$\begin{aligned} \varphi_y''(\mathbf{t}) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} \left[e^{it^T \mathbf{a}} (i\mathbf{a}^T \varphi_x(\mathbf{t}) + \varphi_x'(\mathbf{t})) \right] \\ &\stackrel{(18)}{=} (i\mathbf{a} \varphi_x(\mathbf{t}) + [\varphi_x'(\mathbf{t})]^T) \frac{\partial e^{it^T \mathbf{a}}}{\partial \mathbf{t}} + (\mathbf{I}_p \otimes e^{it^T \mathbf{a}}) \frac{\partial [i\mathbf{a}^T \varphi_x(\mathbf{t}) + \varphi_x'(\mathbf{t})]}{\partial \mathbf{t}} \\ &= [i\mathbf{a} \varphi_x(\mathbf{t}) + [\varphi_x(\mathbf{t})]^2 (i\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t})] i\mathbf{a}^T e^{it^T \mathbf{a}} + e^{it^T \mathbf{a}} [i\mathbf{a} [\varphi_x(\mathbf{t})]^2 (i\boldsymbol{\mu}^T - \mathbf{t}^T \boldsymbol{\Sigma}) + \varphi_x''(\mathbf{t})] \\ &= e^{it^T \mathbf{a}} \left\{ \varphi_x''(\mathbf{t}) - \mathbf{a}\mathbf{a}^T \varphi_x(\mathbf{t}) - [\varphi_x(\mathbf{t})]^2 (\boldsymbol{\mu}\mathbf{a}^T + \mathbf{a}\boldsymbol{\mu}^T + i\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}\mathbf{a}^T + i\mathbf{a}\mathbf{t}^T \boldsymbol{\Sigma}) \right\}. \end{aligned}$$

Teise momendi leidmiseks vajame

$$\begin{aligned} \varphi_y''(\mathbf{0}) &= 1 \cdot \left\{ \varphi_x''(\mathbf{0}) - \mathbf{a}\mathbf{a}^T \cdot 1 - 1^2 \cdot (\boldsymbol{\mu}\mathbf{a}^T + \mathbf{a}\boldsymbol{\mu}^T + 0 + 0) \right\} \\ &= -2\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T - \boldsymbol{\Sigma} - \mathbf{a}\mathbf{a}^T - \boldsymbol{\mu}\mathbf{a}^T - \mathbf{a}\boldsymbol{\mu}^T = -(\mathbf{a} + \boldsymbol{\mu})(\mathbf{a} + \boldsymbol{\mu})^T - \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T - \boldsymbol{\Sigma}. \end{aligned}$$

Valemi (21) järgi on \mathbf{y} teine moment

$$m_2(\mathbf{y}) = \frac{1}{i^2} \varphi_y''(\mathbf{0}) = -\varphi_y''(\mathbf{0}) = (\mathbf{a} + \boldsymbol{\mu})(\mathbf{a} + \boldsymbol{\mu})^T + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T + \boldsymbol{\Sigma},$$

dispersioonimaatriks on siis

$$\begin{aligned} D\mathbf{y} &= E(\mathbf{y}\mathbf{y}^T) - E\mathbf{y}E\mathbf{y}^T = (\mathbf{a} + \boldsymbol{\mu})(\mathbf{a} + \boldsymbol{\mu})^T + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T + \boldsymbol{\Sigma} - (\mathbf{a} + \boldsymbol{\mu})(\mathbf{a} + \boldsymbol{\mu})^T \\ &= \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T + \boldsymbol{\Sigma}. \end{aligned}$$

Kolmas moment. Leiame Laplace'i jaotuse karakteristikliku funktsiooni kolmanda tuletise:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathbf{x}}'''(\mathbf{t}) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} \varphi_{\mathbf{x}}''(\mathbf{t}) \\
&= \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} \left\{ 2[\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})]^3 \otimes (-\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T - i\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}\boldsymbol{\mu}^T - i\boldsymbol{\mu}\mathbf{t}^T\boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}\mathbf{t}^T\boldsymbol{\Sigma}) - [\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})]^2 \otimes \boldsymbol{\Sigma} \right\} \\
&\stackrel{(20)}{=} 2\text{vec}(-\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T - i\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}\boldsymbol{\mu}^T - i\boldsymbol{\mu}\mathbf{t}^T\boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}\mathbf{t}^T\boldsymbol{\Sigma}) \frac{\partial [\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})]^3}{\partial \mathbf{t}} \\
&\quad + 2[\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})]^3 \mathbf{I}_{p^2} \frac{\partial (-\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T - i\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}\boldsymbol{\mu}^T - i\boldsymbol{\mu}\mathbf{t}^T\boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}\mathbf{t}^T\boldsymbol{\Sigma})}{\partial \mathbf{t}} - \text{vec}\boldsymbol{\Sigma} \frac{\partial [\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})]^2}{\partial \mathbf{t}},
\end{aligned}$$

vajalikud tuletised on

$$\begin{aligned}
\frac{\partial [\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})]^3}{\partial \mathbf{t}} &= 3[\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})]^2 \varphi'_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}); \quad \frac{\partial [\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})]^2}{\partial \mathbf{t}} = 2\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) \varphi'_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}); \\
\frac{\partial (-\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T - i\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}\boldsymbol{\mu}^T - i\boldsymbol{\mu}\mathbf{t}^T\boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}\mathbf{t}^T\boldsymbol{\Sigma})}{\partial \mathbf{t}} &\stackrel{(17),(18)}{=} -i\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\Sigma} - i\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\mu} + (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\Sigma})(\mathbf{t} \otimes \mathbf{I}_p + \mathbf{I}_p \otimes \mathbf{t}) \\
&= -i\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\Sigma} - i\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t} \otimes \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}.
\end{aligned}$$

Laplace'i jaotuse karakteristikliku funktsiooni kolmas tuletis on seega

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathbf{x}}'''(\mathbf{t}) &= 6[\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})]^2 \text{vec}(-\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T - i\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}\boldsymbol{\mu}^T - i\boldsymbol{\mu}\mathbf{t}^T\boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}\mathbf{t}^T\boldsymbol{\Sigma}) \varphi'_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) \\
&\quad + 2[\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})]^3 (-i\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\Sigma} - i\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t} \otimes \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}) - 2\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) \text{vec}\boldsymbol{\Sigma} \varphi'_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}).
\end{aligned}$$

Võttes $\varphi'_{\mathbf{x}}(\mathbf{0}) = i\boldsymbol{\mu}^T$, saame

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathbf{x}}'''(\mathbf{0}) &= 6\text{vec}(-\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T) i\boldsymbol{\mu}^T + 2(-i\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\Sigma} - i\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\mu}) - 2\text{vec}\boldsymbol{\Sigma} \cdot i\boldsymbol{\mu}^T \\
&= -i \cdot \left[6\text{vec}(\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T) \cdot \boldsymbol{\mu}^T + 2\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\Sigma} + 2\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\mu} + 2\text{vec}\boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\mu}^T \right].
\end{aligned}$$

Nihutatud Laplace'i jaotuse teine tuletis avaldub kujul

$$\varphi_{\mathbf{y}}''(\mathbf{t}) = e^{i\mathbf{t}^T \mathbf{a}} \otimes g(\mathbf{t}),$$

kus $e^{i\mathbf{t}^T \mathbf{a}}$ on skalaar ja

$$g(\mathbf{t}) = \varphi_{\mathbf{x}}''(\mathbf{t}) - \mathbf{a}\mathbf{a}^T \varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) - [\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})]^2 (\boldsymbol{\mu}\mathbf{a}^T + \mathbf{a}\boldsymbol{\mu}^T + i\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}\mathbf{a}^T + i\mathbf{a}\mathbf{t}^T\boldsymbol{\Sigma})$$

on $p \times p$ -maatriks. Valemi (20) järgi

$$\varphi_{\mathbf{y}}'''(\mathbf{t}) = \text{vec } g(\mathbf{t}) \frac{\partial e^{i\mathbf{t}^T \mathbf{a}}}{\partial \mathbf{t}} + (e^{i\mathbf{t}^T \mathbf{a}} \otimes \mathbf{I}_{p^2}) \frac{\partial g(\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}}.$$

Järgmiseks leiame funktsiooni $g(\mathbf{t})$ tuletise. Liidetavate tuletised on

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_{\mathbf{x}}''(\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} &= \varphi_{\mathbf{x}}'''(\mathbf{t}), \\
\frac{\partial (\mathbf{a}\mathbf{a}^T \varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}))}{\partial \mathbf{t}} &= \frac{\partial (\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) \otimes \mathbf{a}\mathbf{a}^T)}{\partial \mathbf{t}} \stackrel{(20)}{=} \text{vec}(\mathbf{a}\mathbf{a}^T) \cdot \varphi'_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}), \\
\frac{\partial \left\{ [\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})]^2 (\boldsymbol{\mu}\mathbf{a}^T + \mathbf{a}\boldsymbol{\mu}^T + i\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}\mathbf{a}^T + i\mathbf{a}\mathbf{t}^T\boldsymbol{\Sigma}) \right\}}{\partial \mathbf{t}} &\stackrel{(20)}{=} \text{vec}(\boldsymbol{\mu}\mathbf{a}^T + \mathbf{a}\boldsymbol{\mu}^T + i\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}\mathbf{a}^T + i\mathbf{a}\mathbf{t}^T\boldsymbol{\Sigma}) \\
&\quad \cdot 2\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) \varphi'_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) + [\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})]^2 (i\mathbf{a} \otimes \boldsymbol{\Sigma} + i\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{a}),
\end{aligned}$$

uuesti summeerides saame

$$\begin{aligned}\frac{\partial g(\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} &= \varphi_x'''(\mathbf{t}) - \text{vec}(\mathbf{a}\mathbf{a}^T) \cdot \varphi_x'(\mathbf{t}) - 2 \text{vec}(\mu\mathbf{a}^T + \mathbf{a}\mu^T + i\Sigma\mathbf{t}\mathbf{a}^T + i\mathbf{a}\mathbf{t}^T\Sigma) \varphi_x(\mathbf{t})\varphi_x'(\mathbf{t}) \\ &- [\varphi_x(\mathbf{t})]^2 (i\mathbf{a} \otimes \Sigma + i\Sigma \otimes \mathbf{a}).\end{aligned}$$

Meid huvitavad $g(\mathbf{t})$ ja selle tuletise väärtused punktis $\mathbf{t} = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned}g(\mathbf{0}) &= \varphi_x''(\mathbf{0}) - \mathbf{a}\mathbf{a}^T - 1 \cdot (\mu\mathbf{a}^T + \mathbf{a}\mu^T + \mathbf{0} + \mathbf{0}) = -2\mu\mu^T - \Sigma - \mathbf{a}\mathbf{a}^T - \mu\mathbf{a}^T - \mathbf{a}\mu^T \\ \left. \frac{\partial g(\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} \right|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}} &= -i \cdot [6\text{vec}(\mu\mu^T) \cdot \mu^T + 2\mu \otimes \Sigma + 2\Sigma \otimes \mu + 2\text{vec}\Sigma \cdot \mu^T] \\ &- \text{vec}(\mathbf{a}\mathbf{a}^T) \cdot i\mu^T - 2\text{vec}(\mu\mathbf{a}^T + \mathbf{a}\mu^T) \cdot 1 \cdot i\mu^T - 1 \cdot (i\mathbf{a} \otimes \Sigma + i\Sigma \otimes \mathbf{a}) \\ &= -i [6\text{vec}(\mu\mu^T) \cdot \mu^T + \text{vec}(\mathbf{a}\mathbf{a}^T) \cdot \mu^T + 2\text{vec}(\mu\mathbf{a}^T) \cdot \mu^T + 2\text{vec}(\mathbf{a}\mu^T) \cdot \mu^T \\ &+ 2\mu \otimes \Sigma + 2\Sigma \otimes \mu + \mathbf{a} \otimes \Sigma + \Sigma \otimes \mathbf{a} + 2\text{vec}\Sigma \cdot \mu^T]\end{aligned}$$

Nüüd saame leida $\varphi_y'''(\mathbf{0})$,

$$\begin{aligned}\varphi_y'''(\mathbf{0}) &= \text{vec } g(\mathbf{0}) \left. \frac{\partial e^{i\mathbf{t}^T \mathbf{a}}}{\partial \mathbf{t}} \right|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}} + (e^{i\mathbf{0}^T \mathbf{a}} \otimes \mathbf{I}_{p^2}) \left. \frac{\partial g(\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} \right|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}} \\ &= \text{vec } g(\mathbf{0}) i\mathbf{a}^T + \left. \frac{\partial g(\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} \right|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}} \\ &= -i [2\text{vec}(\mu\mu^T) \cdot \mathbf{a}^T + \text{vec}\Sigma \cdot \mathbf{a}^T + \text{vec}(\mathbf{a}\mathbf{a}^T) \cdot \mathbf{a}^T + \text{vec}(\mu\mathbf{a}^T) \cdot \mathbf{a}^T + \text{vec}(\mathbf{a}\mu^T) \cdot \mathbf{a}^T \\ &+ 6\text{vec}(\mu\mu^T) \cdot \mu^T + \text{vec}(\mathbf{a}\mathbf{a}^T) \cdot \mu^T + 2\text{vec}(\mu\mathbf{a}^T) \cdot \mu^T + 2\text{vec}(\mathbf{a}\mu^T) \cdot \mu^T \\ &+ 2\mu \otimes \Sigma + 2\Sigma \otimes \mu + \mathbf{a} \otimes \Sigma + \Sigma \otimes \mathbf{a} + 2\text{vec}\Sigma \cdot \mu^T].\end{aligned}$$

Kolmanda momendi saamiseks tuleb viimane avaldis jagada läbi konstandiga $i^3 = -i$, so moment on avaldise sulgudesse jääv osa. Paneme tähele, et enamik liidetavaid on kujul $\text{vec}(\mathbf{b}\mathbf{c}^T) \cdot \mathbf{d}^T$ kus $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ on p -vektorid. Sellise avaldise võib esitada ka kujul

$$\text{vec}(\mathbf{b}\mathbf{c}^T) \cdot \mathbf{d}^T = (\mathbf{c} \otimes \mathbf{b})\mathbf{d}^T = (\mathbf{c} \otimes \mathbf{b})(1 \otimes \mathbf{d}^T) = \mathbf{c} \otimes \mathbf{b}\mathbf{d}^T,$$

seega

$$\begin{aligned}m_3(\mathbf{y}) &= 2\mu \otimes \mu\mathbf{a}^T + \text{vec}\Sigma \cdot \mathbf{a}^T + \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}\mathbf{a}^T + \mathbf{a} \otimes \mu\mathbf{a}^T + \mu \otimes \mathbf{a}\mathbf{a}^T + 6\mu \otimes \mu\mu^T + \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}\mu^T \\ &+ 2\mathbf{a} \otimes \mu\mu^T + 2\mu \otimes \mathbf{a}\mu^T + 2\mu \otimes \Sigma + 2\Sigma \otimes \mu + \mathbf{a} \otimes \Sigma + \Sigma \otimes \mathbf{a} + 2\text{vec}\Sigma \cdot \mu^T \\ &= (\mu + \mathbf{a}) \otimes \mathbf{a}\mathbf{a}^T + (2\mu + \mathbf{a}) \otimes \mu\mathbf{a}^T + (2\mu + \mathbf{a}) \otimes \mathbf{a}\mu^T + (6\mu + 2\mathbf{a}) \otimes \mu\mu^T \\ &+ \text{vec}\Sigma \cdot (2\mu + \mathbf{a})^T + (2\mu + \mathbf{a}) \otimes \Sigma + \Sigma \otimes (2\mu + \mathbf{a}).\end{aligned}$$

□

3.3 Tihedused

Nihutatud Laplace'i jaotuse ühisjaotus- ja ühistihedusfunktsioon saadakse nihutamise teel tavajalise Laplace'i jaotuse vastavatest funktsioonidest (vt Teoreem 2.1).

Järeldus 3.1 Olgu $\mathbf{y} \sim L_p(\mathbf{a}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Tähistagu F ja f vastavalt normaaljaotuse $N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ jaotus- ja tihedusfunktsiooni. Siis avaldub \mathbf{y} jaotusfunktsioon

$$H(\mathbf{t}) = \int_0^\infty F(z^{-1/2}\mathbf{t} - z^{-1/2}\mathbf{a} - z^{1/2}\boldsymbol{\mu})e^{-z}dz$$

ning tihedusfunktsioon (juhul, kui eksisteerib)

$$\begin{aligned} h(\mathbf{t}) &= \int_0^\infty f(z^{-1/2}\mathbf{t} - z^{-1/2}\mathbf{a} - z^{1/2}\boldsymbol{\mu})z^{-p/2}e^{-z}dz \\ &= \frac{2e^{(\mathbf{t}-\mathbf{a})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}}{(2\pi)^{p/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \left(\frac{(\mathbf{t}-\mathbf{a})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{t}-\mathbf{a})}{2 + \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}} \right)^{\nu/2} K_\nu \left(\sqrt{(2 + \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})(\mathbf{t}-\mathbf{a})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{t}-\mathbf{a})} \right), \end{aligned}$$

kus $\nu = (2 - p)/2$ ja K_ν on kolmandat liiki Besseli modifitseeritud funktsioon.

Tõestus. Olgu G juhusliku vektori $\mathbf{x} \sim L_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)^T$ jaotusfunktsioon ning $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)^T$. Siis on $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{a}$ jaotusega $L_p(\mathbf{a}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Juhusliku vektori $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_p)^T$ jaotusfunktsioon on

$$\begin{aligned} H(\mathbf{t}) &= P(y_1 \leq t_1, \dots, y_p \leq t_p) = P(x_1 + a_1 \leq t_1, \dots, x_p + a_p \leq t_p) = \\ &= P(x_1 \leq t_1 - a_1, \dots, x_p \leq t_p - a_p) = G(\mathbf{t} - \mathbf{a}). \end{aligned}$$

Et nihke jakobiaan on 1, saame \mathbf{y} tihedusfunktsiooniks

$$h(\mathbf{t}) = g(\mathbf{t} - \mathbf{a}).$$

□

Ühemõõtmelise juhu $\mathbf{a} = a$, $\boldsymbol{\mu} = \mu$, $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2$ jaoks saame tihedusfunktsiooni kuju valemist (25)):

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2}} e^{-\frac{|t-a|}{\sigma^2}(\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2} - \mu \cdot \text{sign}(t-a))}.$$

Tavalise Laplace'i jaotuse saavutas tihedusfunktsioon maksimumi 0. Et $h(t) = g(t - a)$, siis on nihutatud Laplace'i jaotuse tihedusfunktsioon maksimaalne punktis $t = a$. Teisisõnu, asukoha- parameeter a määrab jaotuse moodi.

Ka nihutatud Laplace'i jaotuse korral saab tõestada, et lineaarteisendus jääb samasse jaotus- klassi.

Lause 3.2 Olgu $\mathbf{y} \sim L_p(\mathbf{a}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ning olgu \mathbf{A} täisastakuga reaalarvuline $q \times p$ -maatriks, $q < p$. Siis on \mathbf{y} lineaarne teisendus $\mathbf{A}\mathbf{y}$ q -mõõtmelise nihutatud Laplace'i jaotusega, $\mathbf{A}\mathbf{y} \sim L_q(\mathbf{A}\mathbf{a}, \mathbf{A}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^T)$.

Tõestus. Kasutame Lause 2.1 tõestuses tuletatud seost lineaarse teisenduse karakteristikliku funktsiooni jaoks. Nihutatud Laplace'i jaotusega juhusliku vektori \mathbf{y} lineaarse teisenduse ka- rakteristlik funktsioon on

$$\varphi_{\mathbf{A}\mathbf{y}}(\mathbf{t}) = \varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{A}^T\mathbf{t}) = \frac{e^{i(\mathbf{A}\mathbf{t})^T\mathbf{a}}}{1 - i(\mathbf{A}^T\mathbf{t})^T\boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}(\mathbf{A}^T\mathbf{t})^T\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{A}^T\mathbf{t})} = \frac{e^{it^T\mathbf{A}\mathbf{a}}}{1 - it^T \cdot \mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}\mathbf{t}^T \cdot \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{t}},$$

see on parameetritega $\mathbf{A}\mathbf{a}$, $\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}$ ja $\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^T$ nihutatud Laplace'i jaotuse karakteristiklik funktsioon.

□

Seega on ka siin ühe- ja mitmemõõtmelised marginaaljaotused nihutatud Laplace'i jaotusega. Kui \mathbf{y} on nihutatud Laplace'i jaotusega parameetritega $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)^T$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_p)^T$ ja $\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^p$, siis vektori i . komponent Y_i on jaotusega $L(a_i, \mu_i, \sigma_{ii})$.

3.4 Simuleerimiseeskiri

Nihutatud Laplace'i jaotusest väärtuste genereerimine taandub tavalise Laplace'i jaotuse simuleerimisele (vt peatükk 2.4), viimase väärtustele tuleb liita nihke suurus. Simuleerimisalgoritm jaotuse $L_p(\mathbf{a}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ on järgmine.

- Genereerida standardse eksponentjaotusega juhuslik suurus W .
- Genereerida juhuslik vektor \mathbf{z} p -mõõtmelisest normaaljaotusest $N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$.
- Olgu $\mathbf{y} = \mathbf{a} + \boldsymbol{\mu} \cdot W + \sqrt{W} \cdot \mathbf{z}$. Nii defineeritud \mathbf{y} on realisatsioon jaotusest $L_p(\mathbf{a}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

4 Parameetrite hindamine

Et nihutatud Laplace'i jaotus oleks kasutatav andmemudelina, on vaja osata hinnata selle parameetreid. Ülesande muudab keerukaks kolme parameetri olemasolu $(\mathbf{a}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Käesolevas peatükis tuletatakse parameetrite hinnangud momentide meetodil ja moodide kaudu ning uuritakse hinnangute käitumist.

4.1 Momentide meetod

Momentide meetodi jaoks on vaja avaldada jaotuse parameetrid momentide kaudu. Ilmneb, et parameetrid $\boldsymbol{\mu}$ ja $\boldsymbol{\Sigma}$ on avaldatavad teist ja kolmandat järku tsentraalsete momentide kaudu (nende avaldised ei sõltu parameetrist \mathbf{a}). Nihkeparameetri \mathbf{a} saab leida keskväärtuse avaldisest $E\mathbf{y} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{a}$.

Momentide avaldiste lihtsustamiseks vähendame tähtkorrutise abil maatriksite mõõtmeid. Nimelt sisaldab mõõtmetega $p^2 \times p$ kolmas tsentraalne moment korduvaid elemente segamomentide näol. See asjaolu võimaldab momentide maatriksit kokku suruda nii, et oluline informatsioon säilib. Kasutades maatriksit $\mathbf{1}_{p \times p}$, saame tähtkorrutise abil $p^2 \times p$ kolmanda tsentraalse momendi kokku suruda p -vektoriks järgmiselt:

$$\mathbf{1}_{p \times p} \star \bar{m}_3(\mathbf{y}) = \mathbf{1}_{p \times p} \star (2\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^T + \text{vec} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\mu}^T + \boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\mu}). \quad (31)$$

Et tähtkorrutis on lineaarne, võime leida liidetavate tähtkorrutised eraldi. Järgnevas kasutame lühitähistusi $\boldsymbol{\mu}$ ja tsentraalsete momentide elementide summade jaoks:

$$M = \sum_{i=1}^p \mu_i, \quad S = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (D\mathbf{y})_{ij}, \quad H = \sum_{i=1}^{p^2} \sum_{j=1}^p (\bar{m}_3(\mathbf{y}))_{ij}.$$

Liidetavate tähtkorrutised on:

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{p \times p} \star (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^T) &= \mathbf{1}_{p \times p} \star (\boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^T \otimes \boldsymbol{\mu}) \stackrel{(12)}{=} (\mathbf{1}_{p \times p} \star \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^T) \otimes \boldsymbol{\mu} = M^2 \cdot \boldsymbol{\mu}, \\ \mathbf{1}_{p \times p} \star (\text{vec} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\mu}^T) &\stackrel{(13)}{=} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{1}_{p \times p} \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{1}_p \mathbf{1}_p^T \boldsymbol{\mu} = M \cdot \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{1}_p = M \cdot (D\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^T) \mathbf{1}_p \\ &= M \cdot D\mathbf{y} \mathbf{1}_p - M^2 \cdot \boldsymbol{\mu}, \\ \mathbf{1}_{p \times p} \star (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\Sigma}) &\stackrel{(14)}{=} (\mathbf{1}_p^T \boldsymbol{\mu}) \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{1}_p = M \cdot \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{1}_p = M \cdot D\mathbf{y} \mathbf{1}_p - M^2 \cdot \boldsymbol{\mu}, \\ \mathbf{1}_{p \times p} \star (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\mu}) &\stackrel{(12)}{=} (\mathbf{1}_{p \times p} \star (D\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^T)) \otimes \boldsymbol{\mu} = (S - M^2) \boldsymbol{\mu}. \end{aligned}$$

Võrdusest (31) saame seose

$$\mathbf{1}_{p \times p} \star \bar{m}_3(\mathbf{y}) = (S - M^2) \boldsymbol{\mu} + 2M \cdot D\mathbf{y} \mathbf{1}_p,$$

kust saab avaldada parameetri $\boldsymbol{\mu}$:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{S - M^2} (\mathbf{1}_{p \times p} \star \bar{m}_3(\mathbf{y}) - 2M \cdot D\mathbf{y} \mathbf{1}_p). \quad (32)$$

See valem võimaldab leida $\boldsymbol{\mu}$, kui selle elementide summa M on teada. Summeerides võrrandi (32) mõlema poole komponendid, jõuame kuupvõrrandini M jaoks:

$$M = \frac{1}{S - M^2} (H - 2MS) \quad \Rightarrow \quad M^3 - 3MS + H = 0. \quad (33)$$

Selle võrrandi lahendid on

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{z}{2} + \frac{2S}{z}, \\ M_2 &= -\frac{z}{4} - \frac{S}{z} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \left(\frac{z}{2} - \frac{2S}{z} \right), \\ M_3 &= -\frac{z}{4} - \frac{S}{z} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \left(\frac{z}{2} - \frac{2S}{z} \right), \end{aligned} \quad (34)$$

kus

$$z = \sqrt[3]{-4H + 4\sqrt{H^2 - 4S^3}}.$$

Õige lahendi korral peab $S - M^2 > 0$. Tõepoolest, kui avaldis $S - M^2$ on negatiivne, ei saa parameeter Σ olla positiivselt määratud:

$$0 > S - M^2 = \mathbf{1}_p^T (D\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T) \mathbf{1}_p = \mathbf{1}_p^T \Sigma \mathbf{1}_p.$$

Näitame, et $S - M_3^2 > 0$, kuid $S - M_1^2 < 0$ ning $S - M_2^2 < 0$. Sellest järeldub, et ainsana sobib $\boldsymbol{\mu}$ summaks M kuupvõrrandi lahend M_3 .

Märgime, et abisuuruse z arvutamisel kasutatav avaldis $H^2 - 4S^3$ on negatiivne. Tõepoolest,

$$\begin{aligned} H^2 - 4S^3 &\stackrel{(33)}{=} (3MS - M^3)^2 - 4S^3 = M^6 - 6M^4S + 9M^2S^2 - 4S^3 = \\ &= M^6 - 3M^4S + 3M^2S^2 - S^3 - 3M^4S + 6M^2S^2 - 3S^3 = \\ &= (M^2 - S)^3 - 3S(M^2 - S)^2 < 0, \end{aligned} \quad (35)$$

sest $S > 0$ ning Σ positiivse määratuse tõttu ka $S - M^2 > 0$. Seega on abisuurus z kuupjuur kompleksarvust $-4H + 4\sqrt{4S^3 - H^2}i$.

Näitame, et kuupvõrrandi lahendite avaldamiseks kasutatavad suurused $z/2$ ja $2S/z$ on kaaskompleksid. Selleks piisab näidata, et nende suuruste kuubid on kaaskompleksid:

$$\begin{aligned} \left(\frac{z}{2}\right)^3 &= \frac{z^3}{8} = \frac{-H + \sqrt{4S^3 - H^2}i}{2} = -\frac{H}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4S^3 - H^2}i, \\ \left(\frac{2S}{z}\right)^3 &= \frac{8S^3}{z^3} = \frac{2S^3}{-H + \sqrt{4S^3 - H^2}i} = \frac{2S^3(H + \sqrt{4S^3 - H^2}i)}{-(H - \sqrt{4S^3 - H^2}i)(H + \sqrt{4S^3 - H^2}i)} = \\ &= \frac{2S^3(H + \sqrt{4S^3 - H^2}i)}{-H^2 + H^2 - 4S^3} = \frac{-H - \sqrt{4S^3 - H^2}i}{2} = -\frac{H}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4S^3 - H^2}i. \end{aligned}$$

Tähistame $z/2 = a + bi$, siis $2S/z = a - bi$. Kuupvõrrandi lahendid (34) avalduvad nüüd

$$\begin{aligned} M_1 &= a + bi + a - bi = 2a, \\ M_2 &= -\frac{a + bi}{2} - \frac{a - bi}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(a + bi - a + bi) = -a + \frac{i\sqrt{3}}{2}2bi = -a - \sqrt{3}b, \\ M_3 &= -a - \frac{i\sqrt{3}}{2}2bi = -a + \sqrt{3}b. \end{aligned}$$

Ka dispersioonimaatriksi summa S avaldub a ja b kaudu:

$$S = \frac{2S}{z} \cdot \frac{z}{2} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

Seega taandub ülesanne järgnevate avaldiste märkide uurimisele:

$$\begin{aligned} S - M_1^2 &= b^2 - 3a^2, \\ S - M_2^2 &= a^2 + b^2 - (-a - \sqrt{3}b)^2 = -2\sqrt{3}ab - 2b^2, \\ S - M_3^2 &= 2\sqrt{3}ab - 2b^2. \end{aligned}$$

Märkide uurimiseks vajame a ja b avaldise. Kuupjuure võtmiseks avaldisest z viime juurealuse osa trigonomeetrilisele kujule:

$$-4H + 4\sqrt{4S^3 - H^2}i = r(\cos \phi + i \sin \phi).$$

Juurealuse osa moodul on

$$r = \sqrt{(-4H)^2 + (4\sqrt{4S^3 - H^2})^2} = \sqrt{64S^3} = 8S\sqrt{S}.$$

Teame, et imaginaarosa $4\sqrt{4S^3 - H^2}$ on positiivne, seega $\sin \phi > 0$, mis paneb kitsenduse argumendi võimalikele väärtustele: $\phi \in (0, \pi)$. Juurimisel saame

$$z = 2\sqrt{S}(\cos \frac{\phi}{3} + i \sin \frac{\phi}{3}).$$

Kordajad a ja b avalduvad nüüd

$$a = \sqrt{S} \cos \psi, \quad b = \sqrt{S} \sin \psi,$$

kus $\psi = \phi/3$, seega $\psi \in (0, \pi/3)$. Vahemikus $(0, \pi/3)$ on nii siinus kui koosinus positiivsed.

Vaatleme nüüd avaldise $S - M_i^2$ trigonomeetrilisel kujul.

- $S - M_1^2 = S(\sin^2 \psi - 3\cos^2 \psi) \stackrel{?}{<} 0$. Et $S > 0$, piisab võrratuse kehtivuseks näidata, et $\sin^2 \psi < 3\cos^2 \psi$. See võrratus on samaväärne võrratusega $\tan^2 \psi < 3$, mis aga praegu kehtib, kuna $\psi \in (0, \pi/3)$.
- $S - M_2^2 = -2S(\sqrt{3}\sin \psi \cos \psi + \sin^2 \psi) \stackrel{?}{<} 0$. Et $\sin \psi > 0$, $\cos \psi > 0$, on sulgude sees olev avaldis positiivne ning $S - M_2^2$ negatiivne.
- $S - M_3^2 = 2S(\sqrt{3}\sin \psi \cos \psi - \sin^2 \psi) \stackrel{?}{>} 0$. Võrratus kehtib, kui $\sqrt{3}\sin \psi \cos \psi > \sin^2 \psi$. Võrratuse poolte jagamisel positiivse avaldisega $\sin \psi \cos \psi$ saame võrratuse $\tan \psi < \sqrt{3}$, mis kehtib vaatlusaluses vahemikus $(0, \pi/3)$.

Oleme tõestanud järgneva lause.

Lause 4.1 Olgu $\mathbf{y} \sim L_p(\mathbf{a}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ning \mathbf{y} momentide elementide summad

$$M = \sum_{i=1}^p \mu_i, \quad S = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (D\mathbf{y})_{ij}, \quad H = \sum_{i=1}^{p^2} \sum_{j=1}^p (\bar{m}_3(\mathbf{y}))_{ij}. \quad (36)$$

Siis on parameetrid momentide kaudu leitavad järgmiselt:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{S - M^2} (\mathbf{1}_{p \times p} \star \bar{m}_3(\mathbf{y}) - 2M \cdot D\mathbf{y} \mathbf{1}_p), \quad (37)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = D\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^T, \quad (38)$$

$$\mathbf{a} = E\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}, \quad (39)$$

kus tundmatu M avaldub

$$M = -\frac{z}{4} - \frac{S}{z} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \left(\frac{z}{2} - \frac{2S}{z} \right), \quad z = \sqrt[3]{-4H + 4\sqrt{H^2 - 4S^3}}. \quad (40)$$

□

Valimi $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$, $\mathbf{y}_i \sim L_p(\mathbf{a}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ parameetrite hindamiseks tuleks kõigepealt leida momentide hinnangud:

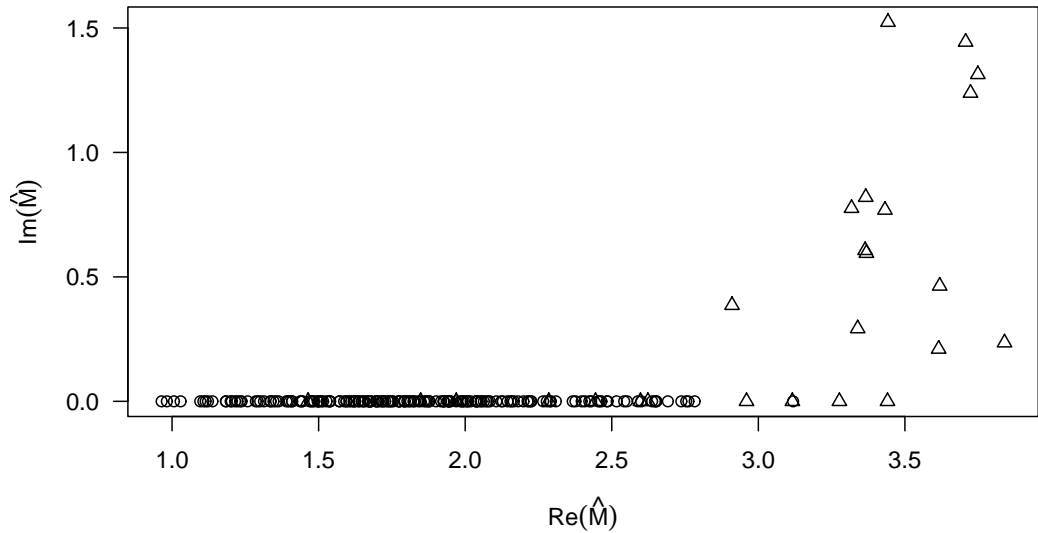
$$\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i, \quad \widehat{D\mathbf{y}} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})^T, \quad \widehat{m_3(\mathbf{y})} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}}) \otimes (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})^T \otimes (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})$$

Suuruste S ja H hinnangud leitakse vastavalt seostele (36), siis saab arvutada M hinnangu seostest (40) ning $\boldsymbol{\mu}$ hinnangu valemi (37) järgi. Seejärel on seoste (38) ja (39) abil leitavad ka hinnangud $\boldsymbol{\Sigma}$ ja \mathbf{a} jaoks.

Praktikas esineb aga valimeid, kus valemi (40) järgi arvutatud M hinnang on kompleksarv. Väidet illustreerib joonis 4, millel on kujutatud M hinnangud kompleksstasandil. M hinnati kokku 200 valimist, mis olid nihutatud Laplace'i jaotusest parameetritega

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 3 & 1.5 \\ 1.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Osa valimite korral on momentide meetodi $\boldsymbol{\Sigma}$ hinnangu diagonaalil negatiivsed elemendid, mis on vastuolus $\boldsymbol{\Sigma}$ positiivse määratuse nõudega. Sellistele valimitele vastavad M hinnangud on märgitud joonisel 4 kolmnurkadega.



Joonis 4: M hinnangud 200 valimis. Kolmnurgaga on märgitud lahendid, mille korral $\boldsymbol{\Sigma}$ momentide meetodi hinnangu diagonaalil on negatiivne element.

Simulatsiooniekspirimendis (alapeatükk 4.3) vaadeldakse meetodi käitumist kahel juhul.

(a) Kasutatakse ainult M reaalsa.

(b) Ebasobivad lahendid „parandatakse“. Kompleksne lahend tekib siis, kui hindamisel on juurealune $H^2 - 4S^3$ positiivne. Miks? Sellisel juhul on abimuutuja z seostest (40) kuupjuur negatiivsest reaalarvust $-4H + 4\sqrt{H^2 - 4S^3}$, so

$$z = \sqrt[3]{(4H - 4\sqrt{H^2 - 4S^3})(\cos \pi + i \sin \pi)} = \sqrt[3]{4H - 4\sqrt{H^2 - 4S^3}} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

Tähistades mooduli $\sqrt[3]{4H - 4\sqrt{H^2 - 4S^3}} =: r$, saame S/z kirja panna

$$\frac{S}{z} = \frac{S}{r} \cdot \frac{\cos 0 + i \sin 0}{\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{S}{r} \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right).$$

Siis avaldub M järgmiselt

$$M = z \left(-\frac{1}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4} \right) + \frac{S}{z} (-1 + i\sqrt{3}) = r \left(\frac{1}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4} \right) + \frac{S}{r} (1 + i\sqrt{3}),$$

millest saame M imaginaarosa

$$\text{Im}(M) = \sqrt{3} \left(-\frac{r}{4} + \frac{S}{r} \right).$$

Reaalarvulise lahendiga on tegemist parajasti siis, kui $r/4 = S/r$. Et

$$\frac{r}{4} = \sqrt[3]{\frac{H - \sqrt{H^2 - 4S^3}}{16}}, \quad \frac{S}{r} = \sqrt[3]{\frac{H + \sqrt{H^2 - 4S^3}}{16}},$$

on M hinnang alati kompleksne, kui $H^2 - 4S^3 > 0$.

Kuna M hinnang arvutatakse võrrandist $H = 3MS - M^3$, kehtib (vt (35))

$$H^2 - 4S^3 = (M^2 - S)^3 - 3S(M^2 - S)^2.$$

Et $H^2 - 4S^3 > 0$, peab $S - M^2 < 0$, so sellisel juhul ei ole ka Σ hinnang positiivselt määratud. Hindamisel nõuame, et $S - M^2 > c$, kus c on väike positiivne konstant, so juhul kui $S - M^2 < 0$, kasutame M hinnangu arvutamisel H asemel

$$H' = \text{sign}(H) \sqrt{-c^3 - 3Sc^2 + 4S^3}.$$

Lisaks nõuame, et Σ hinnangu diagonaalil oleksid vaid positiivsed elemendid. Juhul kui $\hat{\mu}_i^2 > D\mathbf{y}_{ii}$, asendatakse vastav μ_i hinnang

$$\hat{\mu}'_i = \text{sign}(\hat{\mu}_i) \sqrt{\widehat{D\mathbf{y}_{ii}}} - d,$$

kus $d > 0$. Märgime, et selline parandamine tegelikult ei garanteeri Σ hinnangu positiivset määratust.

4.2 Moodide meetod

Pakume välja alternatiivse lahenduse Laplace'i jaotuse momentide hindamiseks, mis põhineb nihutatud Laplace'i jaotuse kahel järgneval omadusel.

- Kui $\mathbf{y} \sim L_p(\mathbf{a}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, siis \mathbf{y} komponendid on ühemõõtmelise Laplace'i jaotusega, $Y_i \sim L(a_i, \mu_i, \sigma_{ii})$, $i = 1, \dots, p$.
- Ühemõõtmelisel juhul määrab asukohaparameter jaotuse moodi.

Seega saame \mathbf{y} asukohaparametrit \mathbf{a} hinnata komponentide moodide hinnangutest moodustatud vektoriga. Kui \mathbf{a} hinnang on olemas, on keskvääruse avaldisest leitav hinnang kujuparametri $\boldsymbol{\mu}$ jaoks, seejärel saab leida dispersioonimaatriksi avaldisest ka skaalaparametri $\boldsymbol{\Sigma}$ hinnangu.

Valimi $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$, $\mathbf{y}_i \sim L_p(\mathbf{a}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ parameetrite hindamise protseduur *moodide meetodil* on järgmine:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{a}} &= (\text{Mode}(Y_1), \dots, \text{Mode}(Y_p))^T, \\ \hat{\boldsymbol{\mu}} &= \bar{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{a}}, \quad \text{kus } \bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i, \\ \hat{\boldsymbol{\Sigma}} &= \widehat{D\mathbf{y}} - \hat{\boldsymbol{\mu}}\hat{\boldsymbol{\mu}}^T, \quad \text{kus } \widehat{D\mathbf{y}} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})^T.\end{aligned}$$

4.3 Hinnangute käitumine

Hinnangute käitumise uurimiseks genereeriti 10 000 valimit (igauks mahuga 500) nihutatud Laplace'i jaotusest. Iga valimi korral hinnati parameetrid momentide meetodil kahel viisil ning moodide meetodil. Vaadeldi kolme erinevat parameeterkomplekti:

- sümmeetriline juht (komponentide hinnangute histogrammid on joonisel 5, hinnangute keskmised tabelis 1 ning keskmised ruuthälbed õigest väärtusest tabelis 4)

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 3 & 1.5 \\ 1.5 & 1 \end{pmatrix};$$

- asümmeetriline juht, komponendid positiivselt korreleeritud (joonis 6, tabelid 2 ja 5)

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 3 & 1.5 \\ 1.5 & 1 \end{pmatrix};$$

- asümmeetriline juht, komponendid negatiivselt korreleeritud (joonis 7, tabelid 3 ja 6)

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 3 & -1.5 \\ -1.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Marginaaljaotuste moodide leidmiseks jaotati reaaltelg lõikudeks pikkusega 0.04 ning moodi hinnanguna kasutati sellise vahemiku keskpunkti, millesse langes kõige rohkem väärtusi.

Sümmeetrilisel juhul annavad kaks erinevat momentide meetodi realiseerimise samu tulemusi, sest kompleksseid lahendeid siis praktiliselt ei teki. Asümmeetria olemasolul kaotavad kõik meetodid täpsuses. Momentide meetod (a), mis kasutab kuupvõrrandi kompleksse lahendi korral ainult reaalosa, muutub asümmeetria olemasolul ebastabiilseks. Momentide meetodi (b) ning moodide meetodi korral on hinnangud keskmiselt lähedal õigele väärtusele, hajuvus õige väärtuse ümber on väiksem moodide meetodi korral. Momentide meetodi (b) korral paigutatakse ebasobivad hinnangud ümber, mistõttu on hinnangute jaotused mitmetipulised.

Tabel 1: Keskmise hinnang, sümmeetriline juht

Parameeter	Momentide meetod (a)	Momentide meetod (b)	Moodide meetod
$a_1 = -5$	-5.001	-5.001	-5.072
$a_2 = 3$	2.999	2.999	2.962
$\mu_1 = 0$	0	0	0.071
$\mu_2 = 0$	0	0	0.038
$\sigma_{11} = 3$	2.96	2.96	2.92
$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 1.5$	1.484	1.484	1.496
$\sigma_{22} = 1$	0.987	0.987	0.981

Tabel 2: Keskmise hinnang, asümmeetriline juht (komponendid positiivselt korreleeritud)

Parameeter	Momentide meetod (a)	Momentide meetod (b)	Moodide meetod
$a_1 = -5$	-1.432	-4.974	-4.85
$a_2 = 3$	2.013	3.042	3.028
$\mu_1 = 1.5$	-2.067	1.475	1.35
$\mu_2 = 0.5$	1.487	0.458	0.473
$\sigma_{11} = 3$	-1737.894	2.868	3.317
$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 1.5$	1648.06	1.549	1.607
$\sigma_{22} = 1$	-1616.035	0.939	1.005

Tabel 3: Keskmise hinnang, asümmeetriline juht (komponendid negatiivselt korreleeritud)

Parameeter	Momentide meetod (a)	Momentide meetod (b)	Moodide meetod
$a_1 = -5$	-13.568	-4.89	-4.848
$a_2 = 3$	18.693	3.181	3.028
$\mu_1 = 1.5$	10.068	1.391	1.349
$\mu_2 = 0.5$	-15.193	0.319	0.472
$\sigma_{11} = 3$	-438667.676	2.366	3.314
$\sigma_{12} = \sigma_{21} = -1.5$	438840.628	-0.973	-1.383
$\sigma_{22} = 1$	-439126.394	0.742	1.004

Tabel 4: Keskmise ruuthälve õigest väärtusest, sümmeetriline juht

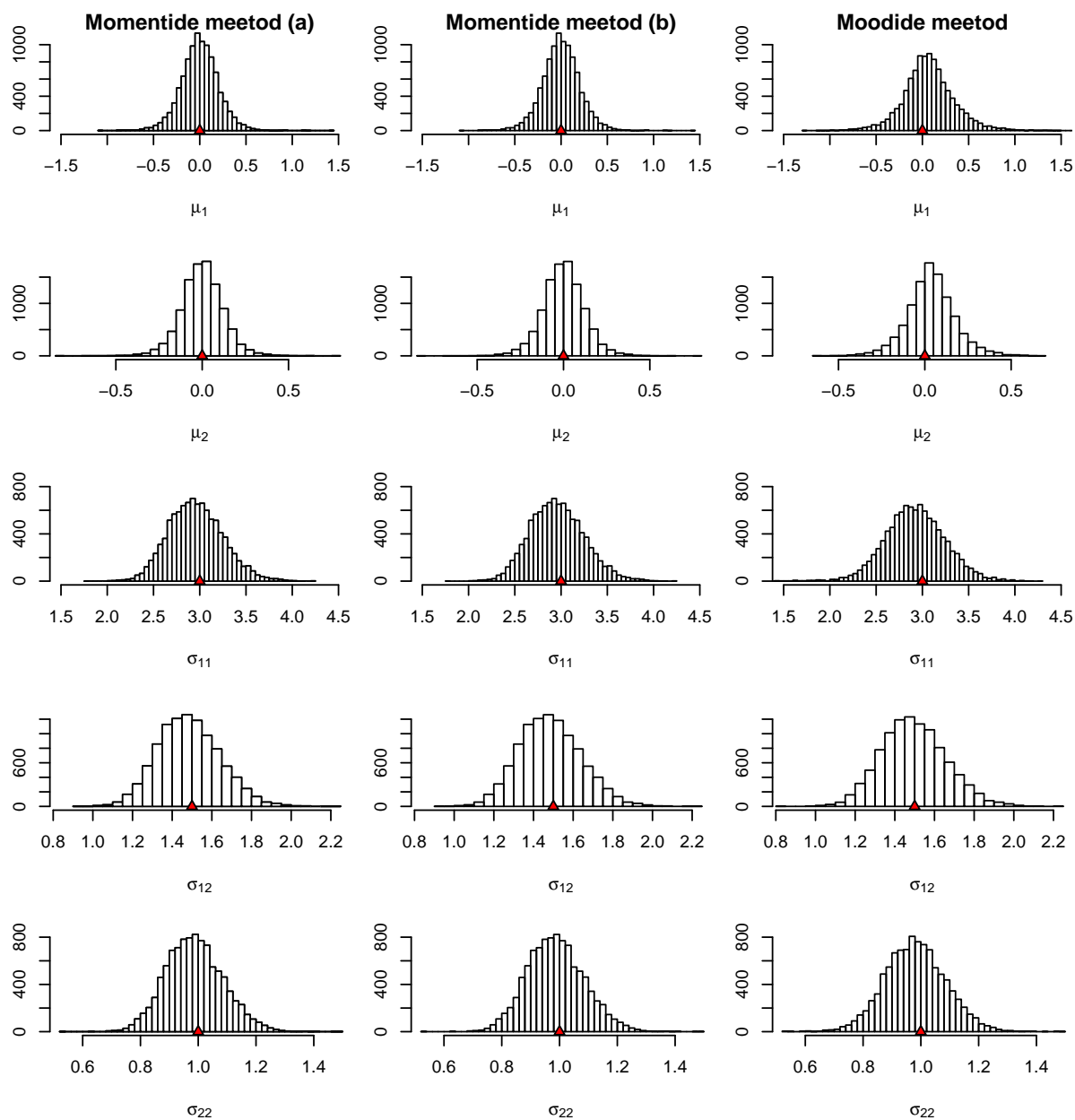
Parameeter	Momentide meetod (a)	Momentide meetod (b)	Moodide meetod
$a_1 = -5$	0.696	0.696	1.555
$a_2 = 3$	0.248	0.248	0.389
$\mu_1 = 0$	0.825	0.825	1.63
$\mu_2 = 0$	0.289	0.289	0.416
$\sigma_{11} = 3$	1.74	1.74	2.38
$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 1.5$	0.495	0.495	0.534
$\sigma_{22} = 1$	0.199	0.199	0.232

Tabel 5: Keskmise ruuthälve õigest väärtusest, asümmeetriline juht (komponendid positiivselt korreleeritud).

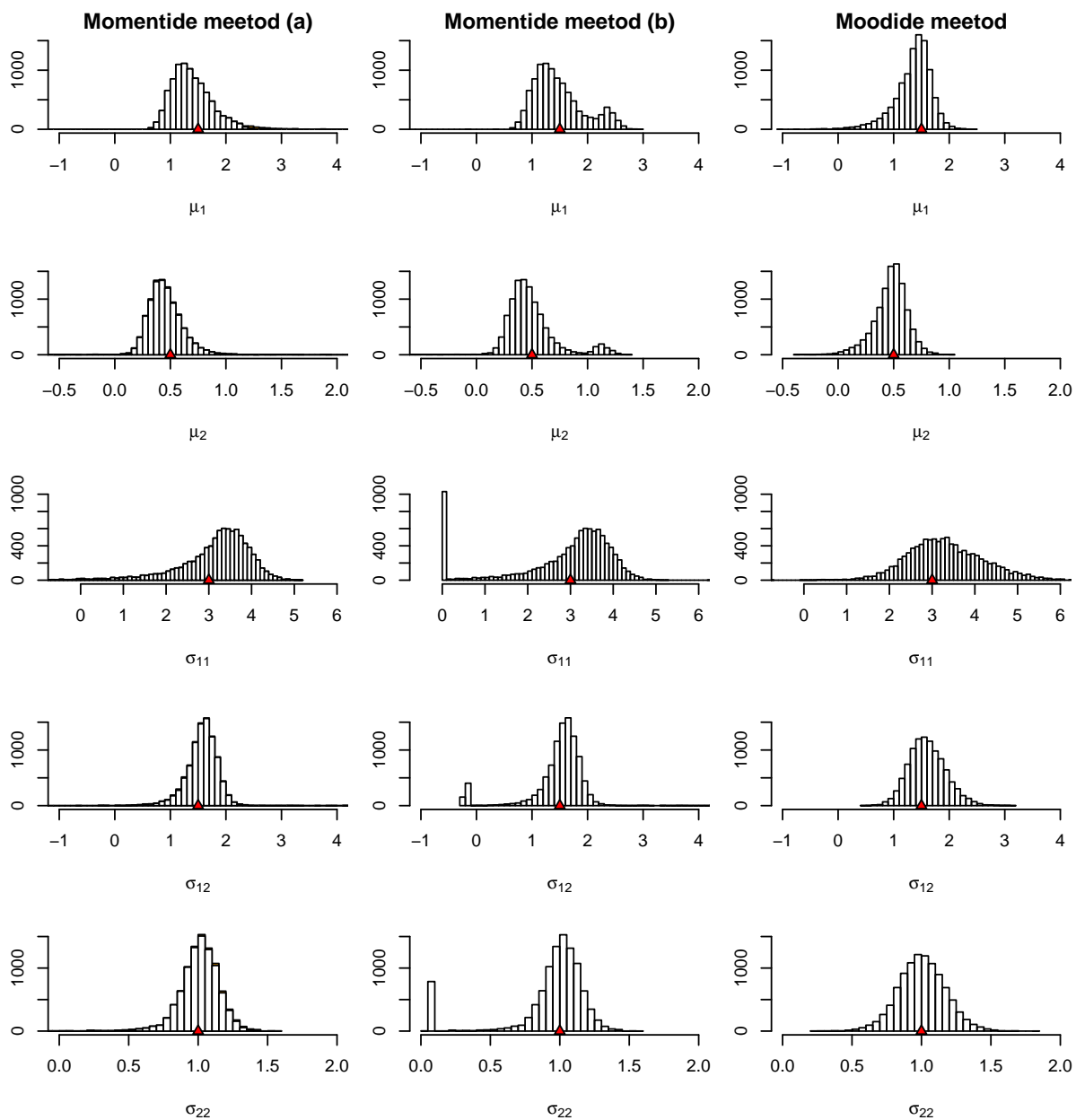
Parameeter	Momentide meetod (a)	Momentide meetod (b)	Moodide meetod
$a_1 = -5$	35103.426	3.993	2.545
$a_2 = 3$	32385.939	2.023	0.423
$\mu_1 = 1.5$	35102.128	4.196	2.69
$\mu_2 = 0.5$	32385.743	2.069	0.464
$\sigma_{11} = 3$	138169033630.335	29.049	18.054
$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 1.5$	134663479722.071	10.752	2.449
$\sigma_{22} = 1$	131257900791.945	1.684	0.582

Tabel 6: Keskmise ruuthälve õigest väärtusest, asümmeetriline juht (komponendid negatiivselt korreleeritud).

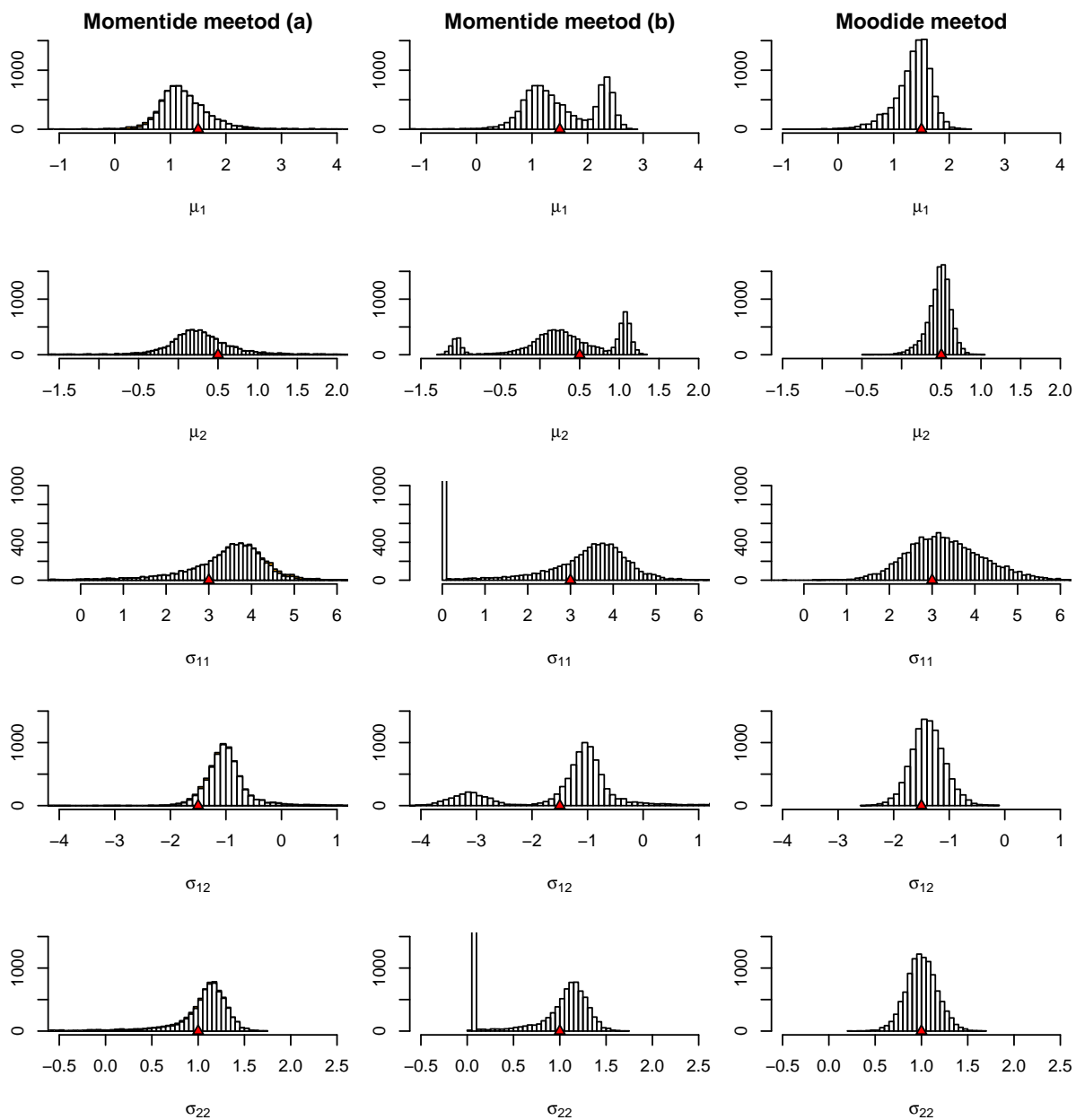
Parameeter	Momentide meetod (a)	Momentide meetod (b)	Moodide meetod
$a_1 = -5$	8790460.24	19.054	2.605
$a_2 = 3$	8800456.154	8.768	0.428
$\mu_1 = 1.5$	8790480.349	19.242	2.768
$\mu_2 = 0.5$	8800462.651	8.798	0.467
$\sigma_{11} = 3$	27528743612194636	69.18	18.034
$\sigma_{12} = \sigma_{21} = -1.5$	27546901166087384	44.497	2.129
$\sigma_{22} = 1$	27565071512837396	6.421	0.578



Joonis 5: Hinnangute jaotused sümmeetrilisel juhul. Parameetri õige väärtus on märgitud kolm-nurgaga.



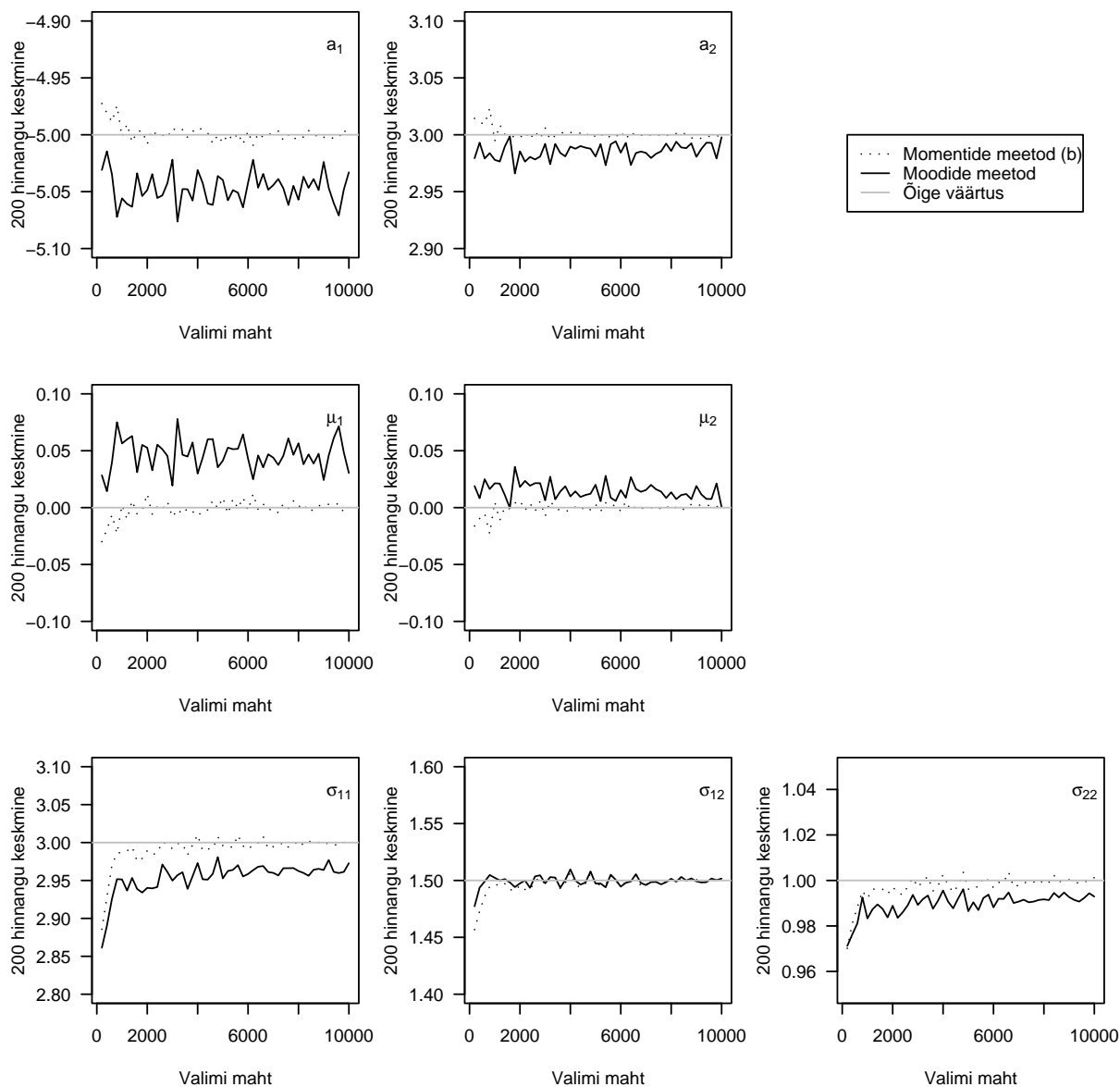
Joonis 6: Hinnangute jaotused asümmeetrilisel juhul, komponendid positiivselt korreleeritud. Parameetri õige väärtus on märgitud kolmnurgaga.



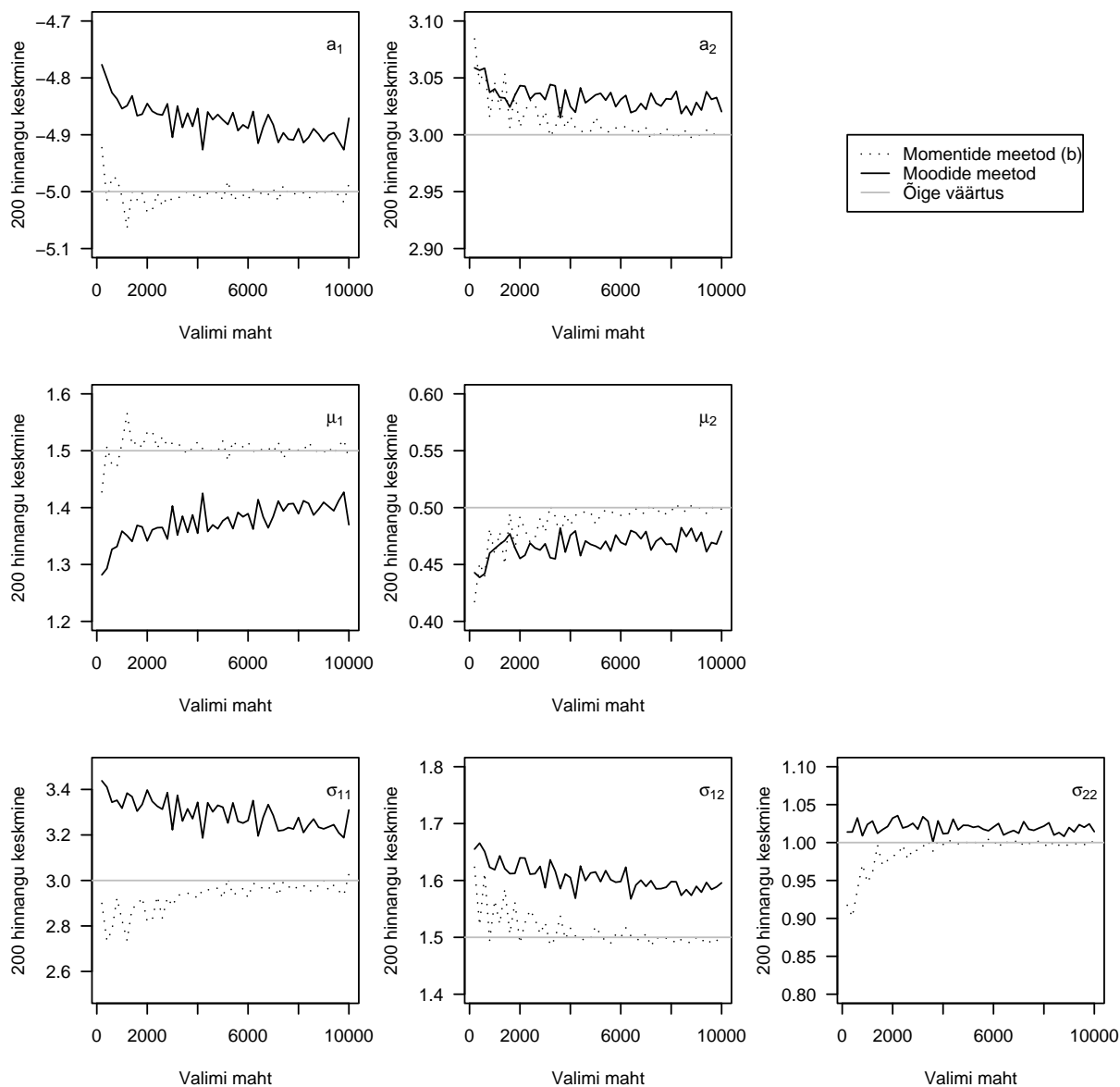
Joonis 7: Hinnangute jaotused asümmeetrilisel juhul, komponendid negatiivselt korreleeritud. Parameetri õige väärtus on märgitud kolmnurgaga.

Samade parameeterkomplektide korral (lk 26) vaadeldi ka *hinnangute koondumist*. Genereeriti valimid mahtudega 200, 400, ..., 10 000 Laplace'i jaotusest, iga mahu kohta 200 valimit. Joonistel 8-10 on kujutatud 200 valimi hinnangute keskmine sõltuvalt valimimahust. (Ebastabiilsuse tõttu on vaatluse alt on välja jäetud momentide meetod, mis kasutab ainult kompleksse hinnangu reaalosa.) Moodide hindamiseks jaotati reaaltelg lõikudeks pikkusega 20/valimi maht.

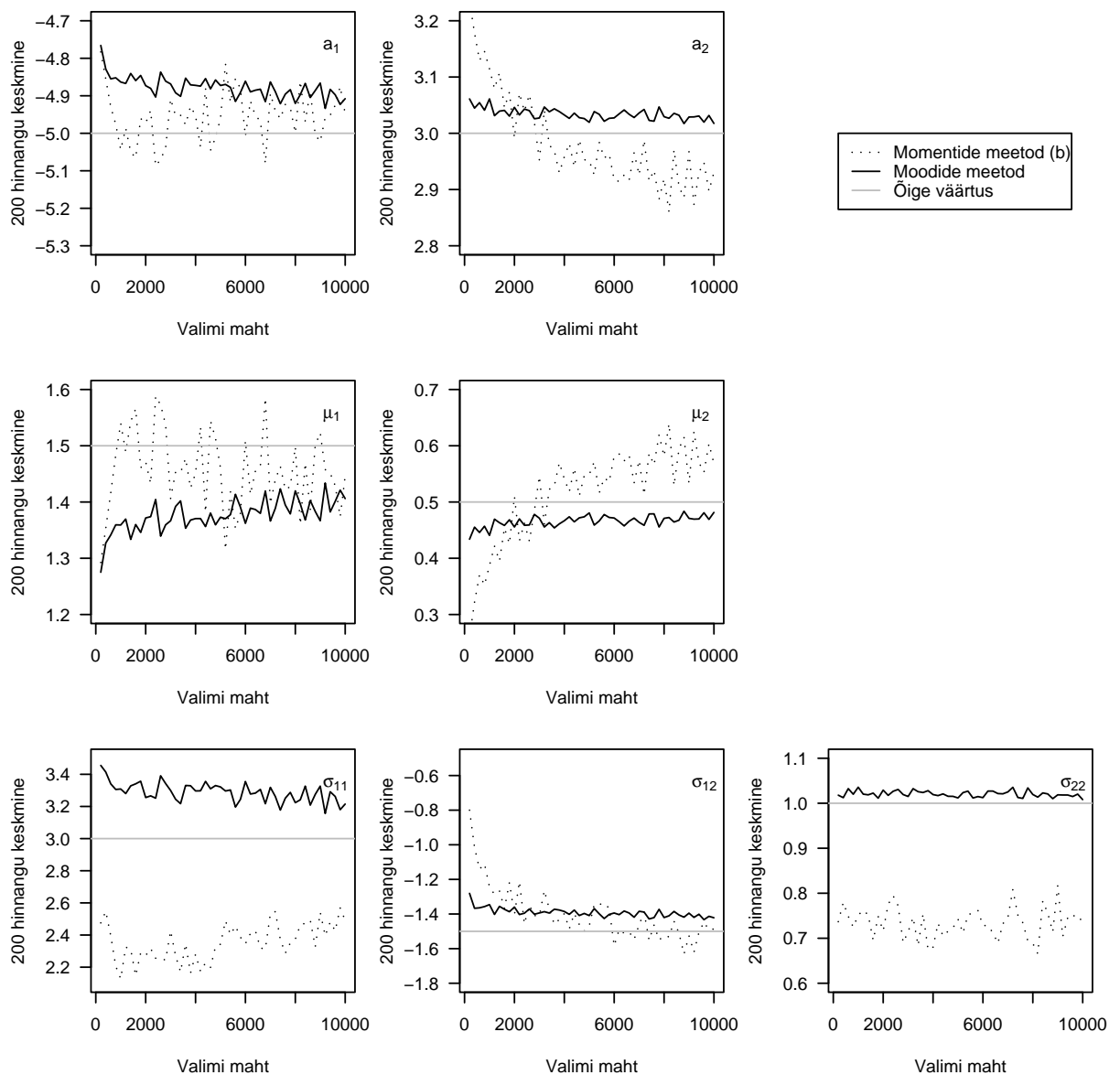
Sümmeetrilisel juhul annavad nii vaadeldud momentide meetod kui moodide meetod keskmiselt õigele väärtusele lähedase hinnangu. Valimimahu suurenedes annab momentide meetod keskmiselt õige hinnangu, moodide meetodi hinnangud on keskmiselt väikese nihkega. Teises näites, kus on mängus asümmeetria ning jaotuse komponendid on positiivselt korreleeritud, annab moodide meetod samuti nihkega hinnanguid ning nihe on suurem kui sümmeetrilisel juhul. Momentide meetod koondub keskmiselt õigeks väärtuseks, kuid märksa aeglasemalt kui sümmeetrilisel juhul. Kolmandas näites, kus on mängus asümmeetria ning jaotuse komponendid on negatiivselt korreleeritud, muutub momentide meetod ebastabiilseks. Siin on moodide meetodi hinnangud väiksema hajuvusega ning keskmiselt lähedasemad õigele parameetri väärtusele.



Joonis 8: Hinnangute koondumine sümmeetrilisel juhul



Joonis 9: Hinnangute koondumine: asümmeetriline juht, komponendid positiivselt korreleeritud



Joonis 10: Hinnangute koondumine: asümmeetriline juht, komponendid negatiivselt korreleeritud

Kokkuvõtteks.

- Momentide meetod (a), kus kompleksse lahendi korral kasutati ainult reaalosa, andis asümmeetria olemasolul väga suure hajuvusega hinnanguid.
- Momentide meetod (b), kus kompleksse lahendi esinemisel hinnangut parandati, andis kahes näites keskmiselt väga lähedasi tulemusi õigele väärtusele. Samas muutis parandamine hinnangu jaotuse mitmetipuliseks ning need tipud ei pruukinud paikneda parameetri õige väärtuse kohal. Olukorras, kus parandatavate hinnangute osakaal oli suur, muutus meetod ebatäpseks.
- Moodide meetodi korral oli hinnangute hajuvus õige väärtuse ümber väiksem kui teistel meetoditel. Hinnangud olid küll väikse nihkega, kuid see nihe oli erinevate parameeter-

komplektide korral võrreldav. Kui momentide meetodi korral oli komplekssete lahendite osakaal suur, olid moodide meetodi hinnangud täpseimad.

Simulatsioonid viidi läbi paketiga R.

Summary

Shifted Asymmetric Multivariate Laplace Distribution

The multivariate Laplace distribution has found use in many applications, including finance, biological and environmental sciences (Kozubowski, Podgórski (2001), Lindsey, Lindsey (2006), Fieller *et al* (1992)). It is one of the methods capable of describing skewed multivariate data that has been employed in the past decade. The advantages of Laplace distribution are existence of moments despite its heavier than normal tails, simple relations between distribution parameters and moments, and also the simple form of the characteristic function.

However, using Laplace distribution as a data model is somewhat complicated. The distribution is set by two parameters, one of which is scale parameter, the other one controls simultaneously both shape and location. This property means that variety of shapes is not available in every possible location, narrowing down the opportunities of usage of Laplace distribution to fit data.

In this paper a three-parameter generalization of the multivariate Laplace distribution is proposed. The third parameter makes possible to vary location and shape independently. On the other hand, the parameter estimation becomes more complicated.

First chapter of the thesis gives overview of notations and matrix algebra in use. The second chapter reviews properties of the multivariate Laplace distribution.

In the third chapter we present the *shifted multivariate Laplace distribution* and derive its characteristic function, moments, distribution and density functions, marginal densities and simulation algorithm.

The fourth chapter deals with parameter estimation. The estimates of method of moments are derived. We also present an alternative approach to estimation, which uses the link between location parameter and modes of marginal distributions. The estimates are studied in simulation experiment.

First two parts review already known results, author's contribution are the results of the third and fourth chapter. The idea of generalization presented in the thesis belongs to professor Tõnu Kollo.

Kirjanduse loetelu

- [1] Fieller, N. R. J.; Flenley, E. C.; Olbricht, W. (1992). Statistics of Particle Size Data. *Applied Statistics*, **41**, 127-146.
- [2] Kilgi, H. (2005). *Asümmeetria ja järsakuse karakteristikud*. Bakalaureusetöö. Tartu Ülikool, Matemaatilise statistika instituut.
- [3] Kollo, T. (2007). Multivariate skewness and kurtosis measure with an application in ICA. *Journal of Multivariate Analysis*, vastu võetud.
- [4] Kollo, T.; Srivastava, M. (2004). Estimation and testing on multivariate Laplace distribution. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, **33**, 2363-2387.
- [5] Kollo, T.; von Rosen, D. (2005). *Advanced Multivariate Statistics with Matrices*. Springer, Dordrecht.
- [6] Kotz, S.; Kozubowski, T. J., Podgórski, K. (2001). *The Laplace Distribution and Generalizations: A Revisit with Applications to Communications, Economics, Engineering, and Finance*. Birkhäuser, Boston.
- [7] Kozubowski, T. J.; Podgórski, K. (2001). Asymmetric Laplace laws and modeling financial data. *Mathematical and Computer Modelling*, **34**, 1003-1021.
- [8] Lindsey, J. K.; Lindsey, P. J (2006). Multivariate distributions with correlation matrices for nonlinear repeated measurements. *Computational Statistics & Data Analysis*, **50**, 720-732.
- [9] MacRae, E. C. (1974). Matrix derivatives with an application to an adaptive linear decision problem. *The Annals of Statistics*, **2**, 337-346.
- [10] Neudecker, H. (1969). Some theorems on matrix differentiation with special reference to Kronecker matrix products. *Journal of the American Statistical Association*, **64**, 953-963.
- [11] Schott, J. R. (1997). *Matrix Analysis for Statistics*. John Wiley & Sons, New York.
- [12] Watson, G. N. (1962). *A Treatise on the Theory of Bessel functions*. Cambridge University Press, London.

Lisa: programmid

Järgnevaid R programme kasutati simulatsiooniekspereimendis. Realiseeritud on maatriksi ruutjuur, tähtkorrutis, tavalise ja nihutatud Laplace'i jaotuse generaator ning funktsioon parameetrite hindamiseks kolmel töös kirjeldatud meetodil.

```
# MAATRIKSI RUUTJUUR
juur = function(x){
  vek = eigen(x)$vectors
  val = eigen(x)$values
  juur = vek %%% diag(sqrt(val)) %%% t(vek)
  return(juur)
}

# TÄHTKORRUTIS
taht = function(x, y){
  m = nrow(x); n = ncol(x)
  mr = nrow(y); ns = ncol(y)
  r = mr/m; s = ns/n
  if (trunc(r) == r & trunc(s) == s){
    maatriks = matrix(0,r,s)
    for (i in 1:m){
      for (j in 1:n){
        maatriks = maatriks + x[i,j] * y[(r*(i-1)+1):(r*i),(s*(j-1)+1):(s*j)]
      }
    }
    return(maatriks)
  }
  else return ("Viga dimensioonides!")
}

# LAPLACE'I JAOTUSE GENERAATOR
laplace = function(n, m, sigma){
  juursigma = juur(sigma)
  p = nrow(sigma)
  w = matrix(rexp(n), n, 1)
  w2 = sqrt(w)
  norm = matrix(rnorm(n * p), nrow = n) %%% juursigma
  vastus = w %%% t(m) + (w2 %%% matrix(1, 1, p)) * norm
  return(vastus)
}

# NIHUTATUD LAPLACE'I JAOTUSE GENERAATOR
glaplace = function(n, mu, a, sigma){
  return(laplace(n, m = mu, sigma = sigma) + matrix(rep(a, n), n, byrow = T))
}

# PARAMEETRITE HINDAMINE
par_hindaja = function(X, const = 0.1, t2psus = 20 / nrow(X)){
  kv = colMeans(X) # 1. moment: keskväärtus
  tsentr = t(X) - kv
```

```

DY = cov(X)          # 2. moment: dispersioon
summa = 0; n = nrow(X); p = ncol(X)
for (i in 1:n){
  summa = summa + tseentr[,i] %x% t(tseentr[,i]) %x% tseentr[,i]
}
m3 = summa / n      # 3. tsentraalne moment
# Abisuurused ja kuupvõrrandi lahendamine
S = sum(DY)
H = sum(m3)
x = (-4 * H + 4 * sqrt(H^2 - 4 * S^3 + 0i))^(1/3)
Mkompl = -1/4 * x - S / x - sqrt(3)*1i/2 * (x / 2 - 2 * S / x)
M = Re(Mkompl)
# Momentide meetod (a)
mu = (2 * M * taht(matrix(1, 1, p), DY) - taht(matrix(1, p, p), m3)) / (M^2 - S)
sigma = DY - mu %%% t(mu)
a = kv - mu
# Momentide meetod (b)
x1 = ifelse(H^2 - 4*S^3 < 0, (-4 * H + 4 * sqrt(H^2 - 4 * S^3 + 0i))^(1/3),
  (-4 * sign(H) * sqrt(-const^3 + 4*S^3 - 3*S*const^2) +
  4 * sqrt(-const^3 - 3*S*const^2 + 0i))^(1/3))
M1 = Re(-1/4 * x1 - S / x1 - sqrt(3)*1i/2 * (x1 / 2 - 2 * S / x1))
mu1 = (2 * M1 * taht(matrix(1, 1, p), DY) - taht(matrix(1, p, p), m3)) /
  ifelse(M1^2 - S < 0, M1^2 - S, -const)
for (i in 1:p){
  if(mu1[i]^2 > DY[i,i]) {
    mu1[i] = sign(mu1[i]) * sqrt(DY[i, i] - const)
  }
}
sigma1 = DY - mu1 %%% t(mu1)
a1 = kv - mu1
# Moodide meetod
mood = rep(NA, p)
for (i in 1:p){
  b = hist(X[,i], plot = F,
    breaks = seq(min(X[,i]) - t2psus, max(X[,i]) + t2psus, t2psus))
  mood[i] = b$mids[which.max(b$counts)]
}
a2 = mood
mu2 = kv - mood
sigma2 = DY - mu2 %%% t(mu2)
return(list(mu = mu, sigma = sigma, a = a,
  mu1 = mu1, sigma1 = sigma1, a1 = a1,
  mu2 = mu2, sigma2 = sigma2, a2 = a2))
}

```